К вопросу построения дискретной схемы для плоской задачи эволюции границы раздела различных жидкостей*

Д. Н. Никольский
Орловский государственный университет, Россия
e-mail: nikolskydn@mail.ru

In this work, a plane problem on an evolution of the interface between various liquids is numerically solved in frames of the Leibenzon—Muskat (piston replacement) formulation. Compared to the previous studies, an easily realizable discrete scheme is proposed.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную фильтрацию в однородной изотропной пористой среде. Область течения D, не нарушая общности рассуждений, полагаем безграничной (границы области фильтрации могут быть учтены при помощи функции Грина). В некоторый момент времени t резкая подвижная граница Γ_t делит область D на части D^- (внутренняя) и D^+ (внешняя), занятые жидкостями с вязкостями μ_2 и μ_1 соответственно. Границу Γ_t полагаем гладкой. Нормаль $\mathbf{n}$ к ней направляем в область D^+. Течение жидкости в области D возбуждается стоками (источниками).

Напорную фильтрацию жидкостей в каждой точке $M \equiv (x, y) \in D$ описывает потенциал $\varphi = \varphi(M, t)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа [3]:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi = -p/\mu_{1,2} \quad \text{в} \quad D\backslash\Gamma_t. \tag{1}$$

Здесь p — давление.

Потенциал φ связан со скоростью фильтрации $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}$ следующим соотношением [3]:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi. \tag{2}$$

Законы (1)–(2) представлены в безразмерных величинах. При этом характерные величины удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_0\mu_0 = KP_0, \quad V_0L_0 = \Phi_0, \quad \sigma L_0 = V_0T_0.$$

Здесь Φ_0 — характерный потенциал, μ_0 — характерная вязкость, K — коэффициент проницаемости пористой среды, P_0 — характерное давление, V_0 — характерная скорость, L_0 — характерное расстояние, σ — пористость, T_0 — характерное время.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-96303), Президента РФ (грант № МК-491.2008.1) и Федерального агентства по образованию РФ.

Полагаем, что вытеснение одной жидкости другой “поршневое” (модель Лейбензона—Маскета). В любой момент времени t граница Γ_t представима параметрически: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \theta)$. Ее перемещение описывается дифференциальным уравнением [1, 2]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-\right)/2. \tag{3}$$

Здесь и далее знаками “$+$” и “$-$” обозначены предельные значения соответствующих функций при приближении к границе Γ_t из областей D^+ и D^-.

В начальный момент времени $t = 0$ граница Γ_t задана

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}(0, \theta). \tag{4}$$

На границе Γ_t в любой момент времени t выполняются условия непрерывности давлений и расхода жидкостей [3]:

$$p^+ = p^-, \quad v_n^+ = v_n^- \quad \text{на } \Gamma_t.$$

С учетом (1) и (2) эти условия примут вид

$$\mu_1\varphi^+ = \mu_2\varphi^-, \quad (\partial_n\varphi)^+ = (\partial_n\varphi)^- \quad \text{на } \Gamma_t. \tag{5}$$

Здесь ∂_n — оператор (частного) дифференцирования.

Потенциал $\varphi(M, t)$ представим в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_*, \tag{6}$$

где φ_0 — потенциал невозмущенного течения однородной жидкости, моделирующий стоки (источники), φ_* — потенциал возмущений, вызванных различием вязкостей жидкостей.

Условия (5) для потенциала φ_* примут вид

$$(1-\lambda)\varphi_*^+ - (1+\lambda)\varphi_*^- = 2\lambda\varphi_0, \quad (\partial_n\varphi_*)^+ = (\partial_n\varphi_*)^- \quad \text{на} \quad \Gamma_t. \tag{7}$$

Здесь параметр $\lambda = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$.

Для обеспечения единственности решения задачи на потенциал φ_* наложим условия регулярности [4]:

$$\varphi_* = O(1/r_{NM}), \quad |\nabla\varphi_*| = O(1/r_{NM}^2), \quad r_{NM} \to \infty.$$

Дифференциальное уравнение движения границы Γ_t (3), с учетом (6), примет вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_*, \quad \mathbf{v}_0 = \nabla\varphi_0, \quad \mathbf{v}_* = \left((\nabla\varphi_*)^+ + (\nabla\varphi_*)^-\right)/2. \tag{8}$$

Итак, плоская задача об эволюции границы Γ_t раздела различных жидкостей состоит в отыскании ее положения в любой момент времени $t > 0$ из уравнений (1) и (8) для потенциала φ_* и радиуса-вектора $\mathbf{r}$, при начальных и граничных условиях (4) и (7), с учетом условий регулярности.

2. Основная система интегрального и дифференциального уравнений

Потенциал φ_* ищем в виде потенциала двойного слоя, непрерывно распределенного по границе Γ_t с плотностью g:

$$\varphi_* = \int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)\Omega(M,N)dl_N, \quad \Omega(M,N) = \partial_{n_N}\Phi_1(M,N), \quad M \notin \Gamma_t, \tag{9}$$

где $\Phi_1(M,N)$ — потенциал нормированного стока с расходом $\Pi_1 = -1$.

Учтем известные свойства потенциала двойного слоя [5]:

$$\varphi_*^{\pm} = G_*g \pm g/2, \quad (\nabla\varphi_*)^{\pm} = \nabla G_*g \pm \operatorname{Grad} g/2 \quad \text{на } \Gamma_t. \tag{10}$$

Здесь в интегральном операторе G_*

$$G_*g = \int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)\Omega(M,N)dl_N \tag{11}$$

интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [5], $\operatorname{Grad} g$ — касательная составляющая градиента функции на кривой.

Подставим (9) в (7) и (8), учтем (10), имеем

$$g - 2\lambda G_*g = 2\lambda\varphi_0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + \nabla G_*g \quad \text{на } \Gamma_t. \tag{12}$$

Таким образом, решение задачи о нахождении границы Γ_t при $t > 0$ сведено к решению системы интегрального и дифференциального уравнений (12) при заданном начальном условии (4).

3. Дискретная схема для основной системы

Несложно показать, что

$$\partial_{n_N}\Phi_1(M,N) = -\partial_{l_N}\Phi_2(M,N).$$

Здесь $\Phi_2(M,N)$ — потенциал скорости нормированного вихря с циркуляцией $\Gamma_2 = -1$, расположенного в точке N [3]. Подставляем последнее выражение в оператор (11), имеем

$$G_*g = -\int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)\partial_{l_N}\Phi_2(M,N)dl_N. \tag{13}$$

Интегрируя по частям (13) [1], получим дифференциальное уравнение из системы (8) в виде

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + \int\limits_{\Gamma_t} \partial_{l_N} g(N,t)\mathbf{V}_2(M,N)dl_N, \tag{14}$$

где $\mathbf{V}_2(M,N) = \nabla_M\Phi_2(M,N)$ — скорость нормированного вихря.

В момент времени t_j, $j = 0, 1, \ldots$, границу Γ_{t_j} разобьем на n частей. Тогда ее положение будет определяться множеством точек $\mathbf{r}_m^j(x_m^j, y_m^j)$, $m = \overline{1, n}$, $j = 0, 1, \ldots$ При этом начальное условие (4) примет вид

$$\mathbf{r}_m^0(x_m^0, y_m^0), \quad m = \overline{1, n}.$$

Из (12) и (14) имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и разностный аналог дифференциального уравнения движения границы

$$g_m^j - 2\lambda \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n} g_k^j \Omega_{mk}^j \Delta l_k^j = 2\lambda \varphi_{0m}^j,$$

$$\Omega_{mk}^j = \partial_{x_k} \Phi_1(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) n_{x_k^j} + \partial_{y_k} \Phi_1(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) n_{y_k^j},$$

$$\frac{\Delta \mathbf{r}_m^j}{\Delta t} = \mathbf{v}_{0m}^j + \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_{l_N} g(N)\right)_k^j \mathbf{V}_{2mk}^j \Delta l_k^j, m = \overline{1, n}, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

В случае если на каждом шаге по времени граница Γ_t переразбивается на равные по длине части, производные n_{x_k}, n_{y_k} и $\partial_{l_N} g(N)$ в (15) заменяются на разностные аналоги с помощью центральных разностей [1, 2]. При этом для восстановления уравнения кривой Γ_t в качестве интерполянта используются кубические и линейные сплайны. В случае если граница Γ_t не переразбивается, для производных n_{x_k}, n_{y_k} и $\partial_{l_N} g(N)$ из (15) строятся более точные разностные операторы [6].

Недостаток дискретной схемы (15) — необходимость аппроксимации производных n_{x_k}, n_{y_k} и $\partial_{l_N} g(N)$. От него можно избавиться. Для этого запишем дискретный оператор, соответствующий (13), в виде

$$G_{*m} g \approx -\sum_{k=1}^{n} g_k^j \int\limits_{l_{k-\frac{1}{2}}}^{l_{k+\frac{1}{2}}} \partial_{l_N} \Phi_2(x_m^j, y_m^j, N) dl_N =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g_k^j \left(\Phi_{2m,k-\frac{1}{2}}^j - \Phi_{2m,k+\frac{1}{2}}^j\right), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

С учетом (16) дискретная схема для основной системы (12) примет вид

$$g_m^j - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} g_k^j \left(\Phi_{2m,k-\frac{1}{2}}^j - \Phi_{2m,k+\frac{1}{2}}^j\right) = 2\lambda \varphi_{0m}^j,$$

$$\frac{\Delta \mathbf{r}_m^j}{\Delta t} = \mathbf{v}_{0m} + \sum_{k=1}^{n} g_k^j \left(\mathbf{V}_{2m,k-\frac{1}{2}}^j - \mathbf{V}_{2m,k+\frac{1}{2}}^j\right), \quad m = \overline{1, n}, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Для решения (17) нет необходимости строить разностные аналоги производных.

Отметим, что если вычисление потенциала вихря представляется невозможным или неоправданно сложным (например в двумерном случае), то для решения задачи эволюции границы раздела жидкостей можно решать СЛАУ из (15) совместно с разностным аналогом дифференциального уравнения из (17).

4. Сопоставление с аналитическим решением

Границу Γ_0 моделируем окружностью радиуса R. Ее параметрическое представление

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad \theta = (2\pi, 0].$$

Потенциал невозмущенного течения $\varphi_0(M,t)$ моделируем стоком, расположенным в точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$\varphi_0 = \frac{q}{2\pi}\ln r_{M_1M},$$

где q — дебит скважины (соответствует стоку при $q < 0$).

В этом случае на первом шаге по времени можно вычислить аналитически скорость перемещения границы раздела жидкостей. Сток расположим внутри окружности ($x_1^2 + y_1^2 < R^2$). Следуя [3], применяем метод изображений к внутренней (для стока в M_1) и к внешней (для источника в бесконечно удаленной точке) областям окружности:

$$\varphi_1 = \frac{q}{2\pi}\left((1+\lambda)\ln r_{M_1M} - \lambda\ln\frac{r_M}{R}\right),$$
$$\varphi_2 = \frac{q}{2\pi}\left(\ln r_{M_1M} - \lambda\ln r_{\tilde{M}_1M} + \lambda\ln\frac{R}{r_1}\right), \quad \tilde{M}_1\left(\frac{x_1R^2}{r_1^2}, \frac{y_1R^2}{r_1^2}\right). \tag{18}$$

Потенциалы (18) удовлетворяют условиям непрерывности давлений и расхода жидкостей (5) на Γ_0.

Используя (18), точно вычислим скорость смещения границы Γ_0:

$$\mathbf{v}_a = \nabla\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) = \left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{\mathbf{r}_{M_1M}}{r^2_{M_1M}} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\mathbf{r}_M}{r^2_M} + \frac{\mathbf{r}_{\tilde{M}_1M}}{r^2_{\tilde{M}_1M}}\right). \tag{19}$$

При указанных условиях решение СЛАУ из систем (15) и (17) значительно упрощается. Так, после несложных эквивалентных преобразований СЛАУ из (15) имеем рекуррентные соотношения

$$g_1 = \frac{C_1\left(1+\dfrac{a(n-1)}{1-a}\right) - \dfrac{a}{1-a}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} C_k}{1+a(n-1)}, \quad g_k = g_1 + \frac{C_k - C_1}{1-a},$$
$$C_k = 2\lambda\varphi_{0k}, \quad k = \overline{1,n}, \quad a = -\frac{\lambda}{n},$$

для СЛАУ из (17)

$$g_1 = \frac{C_1\left(1+a(n-1)\right) - a\sum\limits_{k=2}^{n} C_k}{1+an}, \quad g_k = g_1 + C_k - C_1,$$
$$C_k = 2\lambda\varphi_{0k}, \quad k = \overline{1,n}, \quad a = -\frac{\lambda}{n}.$$

В таблице представлена зависимость ошибки η_1 и η_2 численных расчетов скорости смещения Γ_0 в момент времени $t = 0$ по схемам (15) и (17) для параметра $\lambda = 0.5$. Величины

$$\eta_\nu = |1 - v_\nu/v_a|\cdot 100\,\%, \quad \nu = 1, 2.$$

Сопоставление результатов численного счета с аналитическим решением

n	50	100	200	400	800	1600
$\eta_1, \%$	3.9503	1.9245	0.9332	0.4586	0.2272	0.1131
$\eta_2, \%$	0.1502	$3.943 \cdot 10^{-2}$	$9.866 \cdot 10^{-3}$	$2.467 \cdot 10^{-3}$	$6.168 \cdot 10^{-4}$	$1.542 \cdot 10^{-4}$

Здесь $v_{1,2}$ — модули скорости смещения границы Γ_0, вычисленные по дискретным схемам (15) и (17) соответственно.

Из таблицы видим, что с ростом n ошибки $\eta_{1,2}$ уменьшаются, что свидетельствует о сходимости дискретной схемы. Также видим, что схема (17) более точная.

Список литературы

[1] Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Орел, 2001. 191 с.

[2] Lifanov I.K., Nikolsky D.N., Piven' V.F. Mathematical modelling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Model. 2002. Vol. 17, N 4. P. 381–391.

[3] Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука, 1971. 368 с.

[4] Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде // Тр. X Междунар. симп. "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Херсон, 2001. С. 265–269.

[5] Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002. 286 с.

[6] Никольский Д.Н. Математическое моделирование трехмерной задачи эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в однородном и безграничном грунте // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7, №. 2. С. 108–114. (http://num-meth.srcc.msu.su).

Поступила в редакцию 5 сентября 2007 г.,
в переработанном виде — 16 ноября 2008 г.