Вычислительные технологии **Том 13, № 3, 2008**

Численное решение одного класса вырожденных интегродифференциальных уравнений*

М. В. Булатов, Л. В. Кошкарева
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: mvbul@icc.ru, lvk_home@mail.ru

In this paper we consider the Cauchy problem for systems of integral differential equations with identically singular matrix at the higher derivative, which have a unique continuously differentiable solution. For such problems, we propose a numerical method based on the implicit Euler method and quadrature rectangular formula.

1. Постановка задачи и определения

Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений вида

$$A(t)x'(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) = a, \tag{2}$$

где $A(t)$, $K(t,\tau)$ — матрицы размерности $(n \times n)$, $f(t)$ — n-мерная известная вектор-функция, $x(t)$ — n-мерная искомая вектор-функция. В работе рассмотрен случай, когда матрица $A(t)$ — вырожденная, т. е.

$$\det A(t) = 0 \ \forall t \in [0,1]. \tag{3}$$

Под решением задачи (1), (2) подразумевается любая непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x(t)$, которая обращает исходную систему в тождество. Предполагается, что начальные данные согласованы с правой частью, т. е. исходная задача имеет решение и входные данные $A(t), K(t,\tau), f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости.

Эта работа является продолжением исследований, начатых в [1]. Приведем некоторые определения и известные результаты по данной тематике.

Определение 1 [2]. *Матрица $A^-(t)$ называется полуобратной к матрице $A(t)$, если она удовлетворяет уравнению*

$$A(t)A^-(t)A(t) = A(t).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-01-81013_Бел, № 07-01-9000) и интеграционного проекта № 5 СО РАН.

Данное уравнение перепишем в виде

$$VA = 0, \tag{4}$$

где $V = E - AA^{-}$.

Определение 2 [3]. *Матричный пучок* $\lambda A(t) + K(t,t)$ *удовлетворяет критерию "ранг—степень" на отрезке* $[0,1]$, *если* $rank\, A(t) = deg\, det(\lambda A(t) + K(t,t)) = k = \text{const}$ $\forall t \in [0,1]$.

Лемма 1 [4]. *Пусть матричный пучок* $\lambda A(t) + K(t,t)$ *удовлетворяет критерию "ранг-степень" на отрезке* $[0,1]$. *Тогда* $det(A(t) + V(t)K(t,t)) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$.

Лемма 2 [5]. *Если для неотрицательных чисел* $p_i, v_i, \epsilon_i, i = \overline{1,N}$, *выполнено неравенство* $\epsilon_i \leq v_i + \sum\limits_{j=0}^{i-1} p_j \epsilon_j$, *то справедлива оценка*

$$\epsilon_i \leq v_i + \sum_{j=0}^{i-1} p_j \left(\prod_{k=j+1}^{i-1} (1 + p_k) \right) v_j.$$

Сформулируем достаточные условия существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения задачи (1), (2).

Теорема 1 [1]. *Пусть для задачи (1), (2) выполнены следующие условия:*

1) $rankA(t) = deg[det(\lambda A(t) + K(t,t))] = k = \text{const}$ $\forall t \in [0,1]$;

2) $V(0)K(0,0)a = (V(t)f(t))'|_{t=0}$;

3) $rankA(0) = rank(A(0)|f(0))$;

4) элементы $A(t),\ A'(t),\ A''(t),\ K(t,\tau),\ K'_t(t,\tau),\ K''_{tt}(t,\tau),\ f(t),\ f'(t),\ f''(t)$ *— непрерывны.*

Тогда задача имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение.

Прокомментируем условия теоремы. Первое условие означает отсутствие сингулярных точек на отрезке $[0,1]$, второе и третье условия означают, что правая часть задачи (1), (2) является согласованной (третье условие отражает теорему Кронекера—Капелли). И, наконец, четвертое условия является классическим условием существования непрерывно дифференцируемого решения для интегральных уравнений I рода. Отметим, что для одномерного случая первое условие теоремы означает, что мы будем иметь интегральное уравнение Вольтерра I рода с ядром $K(t,t) \neq 0$ $\forall t \in [0,1]$.

2. Численные методы

В данном разделе предложен и обоснован численный метод решения задачи (1), (2) с условием (3) первого порядка точности.

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку

$$\Delta_h = \{t_i = ih,\ i = 0, 1, \cdots, N,\ h = 1/N\}.$$

Обозначим $A_i = A(t_i),\ f_i = f(t_i),\ K_{ij} = K(t_i, t_j),\ V_i = E - A(t_i)A^{-}(t_i)$, x_i — приближенное значение точного решения $x(t_i)$.

Для решения задачи (1), (2) предлагается применить схему, основанную на неявном методе Эйлера (для аппроксимации производной) и квадратурной формуле правых прямоугольников (для вычисления интеграла).

Эта схема имеет вид

$$A_{i+1}(x_{i+1}-x_i)+h^2\sum_{j=1}^{i+1}K_{i+1j}x_j=hf_{i+1},\ x_0=a,\ i=0,1,...,N-1. \tag{5}$$

Перепишем (5) в виде рекуррентного соотношения:

$$(A_{i+1}+h^2K_{i+1i+1})x_{i+1}=A_{i+1}x_i+hf_{i+1}-h^2\sum_{j=1}^{i}K_{i+1j}x_j, \tag{5a}$$

$$x_0=a,\ i=0,1,...,N-1.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедлива оценка* $\| x(t_j)-x_j \|=O(h)\ \forall j=\overline{1,N}$, *где* x_j *определены из системы (5a).*

Доказательство. Умножим каждое из равенств (5) на матрицу V_{i+1}. Из определения 1 (формула (4)) следует, что $V_{i+1}A_{i+1}=0$. В результате получим

$$h^2V_{i+1}\sum_{j=1}^{i+1}K_{i+1j}x_j=hV_{i+1}f_{i+1}. \tag{6}$$

Далее подействуем на строки системы (6) разностным аналогом дифференциального оператора второго порядка, а именно из $(i+1)$-го равенства (6) вычтем удвоенное i-е равенство и прибавим $(i-1)$-е, полученный результат разделим на h^2. Имеем

$$V_{i+1}\sum_{j=1}^{i+1}K_{i+1j}x_j-2V_i\sum_{j=1}^{i}K_{ij}x_j+V_{i-1}\sum_{j=1}^{i-1}K_{i-1j}x_j=$$

$$=\frac{1}{h}(V_{i+1}f_{i+1}-2V_if_i+V_{i-1}f_{i+1}),\ i=1,2,...,N-1.$$

Результатом сложения данной системы и системы (5) является

$$(A_{i+1}+V_{i+1}K_{i+1i+1}+h^2K_{i+1i+1})x_{i+1}-(A_{i+1}-V_{i+1}K_{i+1i}+2V_iK_{ii}-h^2K_{i+1i})x_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}(V_{i+1}K_{i+1j}-2V_iK_{ij}+V_{i-1}K_{i-1j}+h^2K_{i+1j})x_j=$$

$$=hf_{i+1}+1/h(V_{i+1}f_{i+1}-2V_if_i+V_{i-1}f_{i-1}). \tag{7}$$

Для точного решения $x(t_i)$ имеем аналогичную (7) систему

$$(A_{i+1}+V_{i+1}K_{i+1i+1}+h^2K_{i+1i+1})x(t_{i+1})-(A_{i+1}-V_{i+1}K_{i+1i}+2V_iK_{ii}-h^2K_{i+1i})x(t_i)+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}(V_{i+1}K_{i+1j}-2V_iK_{ij}+V_{i-1}K_{i-1j}+h^2K_{i+1j})x(t_j)=$$

$$=hf_{i+1}+1/h(V_{i+1}f_{i+1}-2V_if_i+V_{i-1}f_{i-1})+h\rho_{i+1}+$$

$$+1/h(V_{i+1}\rho_{i+1}-2V_i\rho_i+V_{i-1}\rho_{i-1}), \tag{8}$$

где ρ_i — остаточный член погрешности.

Обозначив $\epsilon_j = x(t_j) - x_j$, из (7) и (8), получим

$$(A_{i+1} + V_{i+1}K_{i+1i+1} + h^2 K_{i+1i+1})\epsilon_{i+1} -$$

$$-(A_{i+1} - V_{i+1}K_{i+1i} + 2V_i K_{ii} - h^2 K_{i+1i})\epsilon_i + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\epsilon_j = q_{i+1}, \tag{9}$$

где $L_{ij} = V_{i+1}K_{i+1j} - 2V_i K_{ij} + V_{i-1}K_{i-1j} + h^2 K_{i+1j}$; $q_{i+1} = h\rho_{i+1} + 1/h(V_{i+1}\rho_{i+1} - 2V_i\rho_i + V_{i-1}\rho_{i-1})$ величины.

Выражение $V_{i+1}K_{i+1j} - 2V_i K_{ij} + V_{i-1}K_{i-1j}$ — разделенная разность второго порядка по первой переменной, а $V_{i+1}K_{i+1i} - V_i K_{ii}$ — разделенная разность первого порядка по первой переменной. Учитывая это и четвертое условие теоремы 1, запишем следующие равенства:

$$A_{i+1} - V_{i+1}K_{i+1i} + 2V_i K_{ii} - h^2 K_{i+1i} = A_{i+1} + V_i K_{ii} - (V_{i+1}K_{i+1i} - V_i K_{ii}) - h^2 K_{i+1i} =$$

$$= A_{i+1} + V_{i+1}K_{i+1i+1} + hD_{i+1i+1} - h^2 K_{i+1i}; \tag{10}$$

$$V_{i+1}K_{i+1j} - 2V_i K_{ij} + V_{i-1}K_{i-1j} + h^2 K_{i+1j} =$$

$$= \big(V(t)K(t,\tau)\big)''_{tt}\Big|_{t=t_{i+1},\tau=t_j} + h^2 C_{i+1j} = U_{i+1j} + h^2 C_{i+1j}, \tag{11}$$

где $\|D_{i+1i+1}\|$, $\|U_{i+1j}\|$, $\|C_{i+1j}\|$ — равномерно ограниченные.

По лемме 1 матрица $A_{i+1} + V_{i+1}K_{i+1i+1}$ невырожденна. Используя этот факт, формулы (10), (11) и то, что $\|h^2 K_{i+1i+1}\|$ — величина достаточно малая, из (9) выпишем рекуррентное соотношение

$$\epsilon_{i+1} = (A_{i+1} + V_{i+1}K_{i+1i+1})^{-1}(A_{i+1} + V_{i+1}K_{i+1i+1} + hD_{i+1i+1})\epsilon_i -$$

$$-h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \overline{L}_{ij}\epsilon_j + \overline{q}_{i+1},\ i = 0, 1, ..., N-1, \tag{12}$$

где $\overline{L}_{ij} = (A_i + V_i K_i)^{-1} L_{ij}$, $\overline{q}_i = (A_i + V_i K_i)^{-1} q_i$;

$$(A_{i+1} + V_{i+1}K_{i+1i+1})^{-1}(A_{i+1}V_{i+1}K_{i+1i+1} + hD_{i+1i+1}) = E + h\overline{D}_{i+1i+1},$$

где $\|\overline{D}_{i+1i+1}\|$ — равномерно ограниченная величина. Переходя к оценкам по норме, запишем

$$\|E + h\overline{D}_{i+1i+1}\| \le 1 + hd,\ \|\overline{L}_{ij}\| \le l,\ \|\overline{q}_{i+1}\| \le q, \tag{13}$$

где l, q, d — равномерно ограниченные величины.

Итак, из (9) и (13) для рекуррентной формулы (12) получим

$$\|\epsilon_{i+1}\| \le (1 + hd)\|\epsilon_i\| + h^2 l \sum_{j=1}^{i-1} \|\epsilon_j\| + q.$$

Применив лемму 2, окончательно имеем $\|\epsilon_j\| = \|(x(t_j) - x_j)\| = O(h)\ \forall j = \overline{1, N}$. Теорема доказана. □

Остановимся теперь на многошаговых методах численного решения исходной задачи:

$$A_{i+1}\frac{1}{h}\sum_{l=0}^{k} \rho_l x_{i+1-l} + h\sum_{j=0}^{i+1} \omega_{i+1j} K_{i+1j} x_j = f_{i+1}, \tag{14}$$

где $\dfrac{1}{h}\sum\limits_{l=0}^{k}\rho_l x_{i+1-l}$ — аппроксимация $x'(t_{i+1})$, $h\sum\limits_{j=0}^{i+1}\omega_{i+1j}K_{i+1j}x_j$ — аппроксимация интегрального слагаемого, $\rho_0 \neq 0$.

Предполагается, что начальные значения $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ заранее вычислены с достаточной точностью ($x_0 = a$).

Формулы (14) могут быть явными при $\omega_{i+1i+1} = 0$ и неявными при $\omega_{i+1i+1} \neq 0$.

При реализации методов (14) нам необходимо решать СЛАУ относительно векторов x_{i+1} с матрицами перед ними:

$$\rho_0 A_{i+1} + h^2\omega_{i+1i+1}K_{i+1i+1}.$$

Понятно, что в силу вырожденности матрицы $A(t)$, для данного класса задач можно применять только неявные методы.

Как уже было подчеркнуто, задачи (1), (2) включают в себя и интегральные уравнения (системы уравнений) Вольтерра I рода с условием $K(t,t) \neq 0$ ($\det K(t,t) \neq 0$) $\forall t \in [0,1]$. Численные методы решения таких уравнений достаточно хорошо разработаны [5, с. 135–151]. Давно известно [6], что ряд неявных многошаговых методов, например, основанных на квадратурных формулах Ньютона—Котеса, являются неустойчивыми. В деталях данные результаты освещены в более доступной работе [7].

Разработка и обоснование многошаговых методов высокого порядка для численного решения рассматриваемой задачи представляет собой самостоятельный интерес и выходит за рамки этой работы. По мнению авторов, наиболее перспективны исследования методов, основанных на формулах дифференцирования назад [5, с. 82].

3. Численные расчеты

Приведем расчеты модельной задачи по алгоритму (5а).

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & 2e^{\tau} \\ 1 & 2e^{t+\tau}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} e^t(t+1) - te^{-t} + 2t \\ e^t(3t+1) - e^{-t}(t^2+1) \end{pmatrix},$$

$t \in [0;1]$, $x_0 = (1,1)^\top$, точное решение $x = (e^t, e^{-t})^\top$.

Результаты расчетов представлены в таблице.

h	0.1	0.05	0.025	0.0125
err	0.0839	0.0422	0.0211	0.0106

Здесь *err* — евклидова норма погрешности при $t = 1$.

Список литературы

[1] Булатов М.В. О регуляризации вырожденных интегродифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 11. С. 1666–1672.

[2] Ваарман О. Обобщенные обратные отображения. Таллин: Валгус, 1988. 100 с.

[3] Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1996. 278 с.

[4] Булатов М.В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 3. С. 360–372.

[5] Brunner H., van der Houven P.J. The Numerical Solution of Volterra Equations. Amsterdam, 1986.

[6] Linz P. Numerical method for Volterra integral equations of the first kind // Comput. J. 1969. Vol. 12, N 4. P. 393–397.

[7] Тен Мен Ян. Об устойчивых многошаговых методах решения уравнений Вольтерра I рода // Методы численного анализа и оптимизации. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. С. 227–263.

Поступила в редакцию 26 сентября 2007 г.,
в переработанном виде — 13 февраля 2008 г.