

# Моделирование калибровочных соотношений для неполиномиальных сплайнов\*

А. А. МАКАРОВ

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

e-mail: Antony.Makarov@gmail.com

Approximation relations are regarded as a system of equations for deducing of (polynomial and non-polynomial) splines. Twice continuous differentiable splines of the third order on irregular grid are constructed; coordinate splines have minimal support. The main result of the paper is a numerical simulation of calibration relations for the trigonometric splines connected with a grid refinement. This leads to a wavelet decomposition of signals with fast oscillations. The obtained relations contain less than three terms and therefore these relations can be easily realized on a two-processor computer.

## 1. Предварительные обозначения

Пусть  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел,  $\mathbb{R}^1$  — множество вещественных чисел. Будем использовать четырехмерное векторное пространство  $\mathbb{R}^4$ , причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для двух векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$  выражение  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$  представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов. Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^4$  (в указанном только что порядке), обозначается символом  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ , а выражение  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$  означает ее определитель.

Упорядоченное множество  $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  векторов  $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^4$  будем называть *цепочкой* векторов. Цепочка  $\mathbf{A}$  называется *полной цепочкой векторов*, если матрица  $A_j \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_{j-3}, \mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$  является неособенной при любом  $j \in \mathbb{Z}$ .

Для произвольных векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}''$  из пространства  $\mathbb{R}^4$  введем полилинейную вектор-функцию  $\mathbf{a}$ , задаваемую символическим определителем

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'') \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x}' & \mathbf{x}'' \\ \det(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{x}) & \det(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{x}') & \det(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{x}'') \\ \det(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'', \mathbf{x}) & \det(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'', \mathbf{x}') & \det(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{z}'', \mathbf{x}'') \end{pmatrix}.$$

Через  $C^2(\alpha, \beta)$  обозначим линейное пространство функций, непрерывных вместе с первой и второй производными на интервале  $(\alpha, \beta)$ .

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-01-00269 и № 07-01-00451).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

## 2. $B_\varphi$ -сплайны

На интервале  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$  рассмотрим сетку  $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ :

$$X : \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots; \quad \text{пусть } \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow -\infty} x_j, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j \rightarrow +\infty} x_j. \quad (2.1)$$

Введем обозначения  $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j \in \mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1})$ ,  $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+4}]$ ,  $J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-3, k-2, k-1, k\}$ , где  $k, j \in \mathbb{Z}$ . Для определенности в дальнейшем будем считать, что интервал  $(\alpha, \beta)$  конечен (небольшая модификация предположений позволяет рассмотреть случай полубесконечного интервала, а также случай, когда  $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$ ).

При  $K_0 \geq 1$ ,  $K_0 \in \mathbb{R}^1$  обозначим  $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$  класс сеток вида (2.1) со свойством локальной квазиравномерности  $K_0^{-1} \leq (x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})^{-1} \leq K_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$  и положим  $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j \in \mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$ .

Пусть  $\varphi(t)$  — четырехкомпонентная вектор-функция (столбец) с компонентами из пространства  $C^2(\alpha, \beta)$ ; вводя обозначения  $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j)$ ,  $\varphi'_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_j)$ ,  $\varphi''_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(x_j)$ , определим цепочку векторов  $\{\mathbf{a}_j\}$  формулой

$$\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi''_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi''_{j+2}, \varphi_{j+3}, \varphi'_{j+3}, \varphi''_{j+3}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

и рассмотрим векторы  $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^4$ , задаваемые тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Если цепочка векторов  $\{\mathbf{a}_j\}$  полная, то из условий

$$\sum_{j' \in J_k} \mathbf{a}_{j'} \omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin S_j \cap M, \quad (2.4)$$

однозначно определяются функции  $\omega_j(t)$ ,  $t \in M$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Линейная оболочка  $\mathcal{B}_\varphi(X)$  функций  $\omega_j(t)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  называется пространством  $B_\varphi$ -сплайнов на сетке  $X$ , функции  $\omega_j(t)$  — координатными  $B_\varphi$ -сплайнами (третьего порядка), а  $\varphi$  — порождающей вектор-функцией для пространства  $\mathcal{B}_\varphi(X)$ . Условия (2.4) называются аппроксимационными соотношениями.

При  $\varphi(t) \in C^3(\alpha, \beta)$  рассмотрим вронскиан  $W(t) = \det(\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''')(t)$ .

**Лемма.** Если  $\varphi \in C^4[\alpha, \beta]$ , вронскиан  $W(t)$  отличен от нуля на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и  $X \in \mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$  для некоторого  $K_0 \geq 1$ , то существует  $\varepsilon > 0$  такое, что при  $h_X < \varepsilon$  цепочка  $\{\mathbf{a}_j\}$  является полной.

**Доказательство** сводится к использованию формулы Тейлора в представлении (2.2) для получения асимптотики, равномерной на интервале  $(\alpha, \beta)$ . Более подробно здесь останавливаться не будем.

**Теорема.** Если цепочка векторов  $\mathbf{a}_j$  полная, то функции  $\omega_j(t)$  дважды непрерывно дифференцируемы на интервале  $(\alpha, \beta)$  и справедливы формулы

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} \quad \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}), \quad (2.5)$$

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} \cdot \frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}} \quad \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \quad (2.6)$$

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+4}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_j} - \frac{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_{j-1}}{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_j} \cdot \frac{\mathbf{d}_{j+3}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_{j-1}} \quad \text{при } t \in [x_{j+2}, x_{j+3}], \quad (2.7)$$

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+4}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+4}^T \mathbf{a}_j} \quad \text{при } t \in [x_{j+3}, x_{j+4}], \quad (2.8)$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \notin [x_j, x_{j+4}].$$

**Доказательство** получается подстановкой формул (2.5)–(2.8) в аппроксимационные соотношения (2.4) с использованием определения векторов  $\mathbf{a}_j$  и  $\mathbf{d}_j$  (см. (2.2) и (2.3)). Непрерывность функции  $\omega_j(t)$ , ее первой и второй производных проверяется в узлах  $x_{j+i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , непосредственным применением формул (2.5)–(2.8). В остальных точках интервала  $(\alpha, \beta)$  их непрерывность очевидна.

### 3. Калибровочные соотношения для $B_\varphi$ -сплайнов

Исходная сетка  $X$  дополняется новым узлом  $\xi$ , и на полученной таким образом сетке  $\bar{X}$  рассматриваются сплайны  $\bar{\omega}_j(t)$ . Калибровочные соотношения дают представление сплайнов  $\omega_j(t)$  в виде линейной комбинации сплайнов  $\bar{\omega}_j(t)$ . Следствием этих соотношений является вложенность пространства  $\mathcal{B}_\varphi(X)$  в пространство  $\mathcal{B}_\varphi(\bar{X})$ .

Пусть  $\xi$  — упомянутый новый узел,  $\xi \in (x_k, x_{k+1})$ , а  $\bar{x}_j$  — узлы вновь полученной сетки:

$$\bar{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \quad \text{при } j \leq k, \quad \bar{x}_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \xi, \quad \bar{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j-1} \quad \text{при } j \geq k+2, \quad \bar{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}.$$

Функции  $\omega_j$  зависят от узлов  $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}$ ; введем функцию шести вещественных переменных  $\omega(u, v, w, y, z, t)$  (см. формулы (2.5)–(2.8)) такую, что

$$\omega_j(t) = \omega(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}, t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

На новой сетке рассмотрим функции  $\bar{\omega}_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}, \bar{x}_{j+2}, \bar{x}_{j+3}, \bar{x}_{j+4}, t)$ .

Очевидно, что для  $t \in (\alpha, \beta)$  верны тождества

$$\omega_j(t) \equiv \bar{\omega}_j(t) \quad \text{при } j \leq k-4, \quad \omega_j(t) \equiv \bar{\omega}_{j+1}(t) \quad \text{при } j \geq k+1. \quad (3.2)$$

Условимся надчеркивать обозначения всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой  $\bar{X}$ , в частности, положим  $\bar{\varphi}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\bar{x}_j)$ ,  $\bar{\varphi}'_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(\bar{x}_j)$ ,  $\bar{\varphi}''_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(\bar{x}_j)$ ,

$$\bar{\mathbf{a}}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\bar{\varphi}_{j+1}, \bar{\varphi}'_{j+1}, \bar{\varphi}''_{j+1}, \bar{\varphi}_{j+2}, \bar{\varphi}'_{j+2}, \bar{\varphi}''_{j+2}, \bar{\varphi}_{j+3}, \bar{\varphi}'_{j+3}, \bar{\varphi}''_{j+3}),$$

$$\bar{\mathbf{d}}_j^T \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}'_j, \bar{\varphi}''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Функции  $\omega_{k-3}$ ,  $\omega_{k-2}$ ,  $\omega_{k-1}$  и  $\omega_k$  можно представить с помощью линейных комбинаций функций  $\bar{\omega}_j$ , а именно (подробнее см. [1]):

$$\omega_{k-3}(t) \equiv \bar{\omega}_{k-3}(t) + \mathbf{p}_{k-3, k-2} \bar{\omega}_{k-2}(t), \quad (3.3)$$

$$\omega_{k-2}(t) \equiv \mathbf{p}_{k-2, k-2} \bar{\omega}_{k-2}(t) + \mathbf{p}_{k-2, k-1} \bar{\omega}_{k-1}(t), \quad (3.4)$$

$$\omega_{k-1}(t) \equiv \mathbf{p}_{k-1, k-1} \bar{\omega}_{k-1}(t) + \mathbf{p}_{k-1, k} \bar{\omega}_k(t), \quad (3.5)$$

$$\omega_k(t) \equiv \mathbf{p}_{k,k} \bar{\omega}_k(t) + \bar{\omega}_{k+1}(t), \quad (3.6)$$

где

$$\mathbf{p}_{k-3,k-2} = \frac{\bar{\mathbf{d}}_{k+2}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-2}}{\bar{\mathbf{d}}_{k+2}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-3}}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p}_{k-2,k-2} = \left( \bar{\mathbf{d}}_{k+3}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-2} - \bar{\mathbf{d}}_{k+3}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-3} \frac{\bar{\mathbf{d}}_{k+2}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-2}}{\bar{\mathbf{d}}_{k+2}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-3}} \right) / \bar{\mathbf{d}}_{k+3}^T \mathbf{a}_{k-2}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{p}_{k-2,k-1} = \frac{\bar{\mathbf{d}}_{k+3}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-1}}{\bar{\mathbf{d}}_{k+3}^T \mathbf{a}_{k-2}}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{p}_{k-1,k-1} = \frac{\bar{\mathbf{d}}_{k-1}^T \bar{\mathbf{a}}_{k-1}}{\bar{\mathbf{d}}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{p}_{k-1,k} = \left( \bar{\mathbf{d}}_{k-1}^T \bar{\mathbf{a}}_k - \bar{\mathbf{d}}_{k-1}^T \bar{\mathbf{a}}_{k+1} \frac{\bar{\mathbf{d}}_k^T \bar{\mathbf{a}}_k}{\bar{\mathbf{d}}_k^T \bar{\mathbf{a}}_{k+1}} \right) / \bar{\mathbf{d}}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{p}_{k,k} = \frac{\bar{\mathbf{d}}_k^T \bar{\mathbf{a}}_k}{\bar{\mathbf{d}}_k^T \bar{\mathbf{a}}_{k+1}}. \quad (3.12)$$

Тождества (3.2)–(3.6) называются *калибровочными соотношениями*.

#### 4. Моделирование $B_\varphi$ -сплайнов и калибровочных соотношений

Рассмотрим тригонометрические  $B_\varphi$ -сплайны, получаемые при  $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \sin t, \cos t, \sin 2t)^T$ . Имеем  $\varphi'(t) = (0, \cos t, -\sin t, 2 \cos 2t)^T$ ,  $\varphi''(t) = (0, -\sin t, -\cos t, -4 \sin 2t)^T$ ,  $\varphi'''(t) = (0, -\cos t, \sin t, -8 \cos 2t)^T$ .

Тогда вронскиан  $W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t))$  отличен от нуля на отрезке  $[\alpha, \beta] \subset \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ , ибо

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t & -\cos t & \sin t \\ \sin 2t & 2 \cos 2t & -4 \sin 2t & -8 \cos 2t \end{pmatrix} = 6 \cos 2t.$$

Поэтому для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток координатные  $B_\varphi$ -сплайны существуют и  $\text{supp } \omega_j(t) = [x_j, x_{j+4}]$ , где  $j \in \mathbb{Z}$ . Из (2.3) найдем  $\mathbf{d}_j = (-6 \sin x_j \cos x_j, -4 \cos^3 x_j + 6 \cos x_j, 4 \cos^2 x_j \sin x_j + 2 \sin x_j, -1)^T$ . Теперь представим вектор  $\mathbf{a}_j$  в покомпонентном виде  $\mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_{0,j}, \mathbf{a}_{1,j}, \mathbf{a}_{2,j}, \mathbf{a}_{3,j})^T$ . Тогда  $\mathbf{a}_{0,j}, \mathbf{a}_{1,j}, \mathbf{a}_{2,j}, \mathbf{a}_{3,j}$  определяются равенствами

$$\mathbf{a}_{0,j} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j \xi_{0,j}, \quad \mathbf{a}_{1,j} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j ((\xi_{0,j} - \xi_{2,j}) \sin x_{j+1} - \xi_{1,j} \cos x_{j+1}),$$

$$\mathbf{a}_{2,j} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j (\xi_{1,j} \sin x_{j+1} + (\xi_{0,j} - \xi_{2,j}) \cos x_{j+1}), \quad \mathbf{a}_{3,j} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j ((\xi_{0,j} - 4\xi_{2,j}) \sin 2x_{j+1} - 2\xi_{1,j} \cos 2x_{j+1}),$$

где  $\zeta_j, \xi_{0,j}, \xi_{1,j}, \xi_{2,j}$  вычисляются по формулам

$$\zeta_j = \sin \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} \sin \frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2},$$

$$\begin{aligned}
\xi_{0,j} &= 16(2 \cos(x_{j+3} + x_{j+1}) + \cos 2x_{j+3}) \left( 2 \cos \frac{x_{j+2} + 3x_{j+1}}{2} + \cos \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{\cos} 2x_{j+2} \right) \times \\
&\quad \times \sin \frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2} - 16(2 \cos(x_{j+2} + x_{j+1}) + \cos 2x_{j+2}) \times \\
&\quad \times \left( 2 \cos \frac{x_{j+3} + 3x_{j+1}}{2} + \cos \frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2} \cos 2x_{j+3} \right) \sin \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}, \\
\xi_{1,j} &= 32 \cos \frac{3x_{j+2} + x_{j+1}}{2} \left( 2 \cos \frac{x_{j+3} + 3x_{j+1}}{2} + \cos \frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2} \cos 2x_{j+3} \right) \sin^2 \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} - \\
&\quad - 32 \cos \frac{3x_{j+3} + x_{j+1}}{2} \left( 2 \cos \frac{x_{j+2} + 3x_{j+1}}{2} + \cos \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2} \cos 2x_{j+2} \right) \sin^2 \frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2}, \\
\xi_{2,j} &= 32\zeta_j \cos \frac{3x_{j+3} + x_{j+1}}{2} (2 \cos(x_{j+2} + x_{j+1}) + \cos 2x_{j+2}) \sin \frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2} - \\
&\quad - 32\zeta_j \cos \frac{3x_{j+2} + x_{j+1}}{2} (2 \cos(x_{j+3} + x_{j+1}) + \cos 2x_{j+3}) \sin \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}.
\end{aligned}$$

Согласно формулам (2.5)–(2.8) получаем следующие представления функции  $\omega_j(t)$ :

1) при  $t \in [x_j, x_{j+1})$  справедливо тождество  $\omega_j(t) =$

$$= \frac{-2 \cos 2x_j \sin(t - x_j) + 2 \sin(t + x_j)(2 - \cos(t - x_j)) - 2 \sin 2x_j}{-4\mathbf{a}_{1,j} \cos^3 x_j + 4\mathbf{a}_{2,j} \cos^2 x_j \sin x_j + 6\mathbf{a}_{1,j} \cos x_j + (2\mathbf{a}_{2,j} - 3\mathbf{a}_{0,j}) \sin x_j - \mathbf{a}_{3,j}},$$

2) при  $t \in [x_{j+1}, x_{j+2})$  справедливо тождество  $\omega_j(t) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2 \cos 2x_j \sin(t - x_j) + 2 \sin(t + x_j)(2 - \cos(t - x_j)) - 2 \sin 2x_j}{-4\mathbf{a}_{1,j} \cos^3 x_j + 4\mathbf{a}_{2,j} \cos^2 x_j \sin x_j + 6\mathbf{a}_{1,j} \cos x_j + (2\mathbf{a}_{2,j} - 3\mathbf{a}_{0,j}) \sin x_j - \mathbf{a}_{3,j}} - \\
&\quad - \frac{4\mathbf{a}_{1,j+1} \cos^3 x_j + 4\mathbf{a}_{2,j+1} \cos^2 x_j \sin x_j + 6\mathbf{a}_{1,j+1} \cos x_j + (2\mathbf{a}_{2,j+1} - 3\mathbf{a}_{0,j+1}) \sin x_j - \mathbf{a}_{3,j+1}}{-4\mathbf{a}_{1,j} \cos^3 x_j + 4\mathbf{a}_{2,j} \cos^2 x_j \sin x_j + 6\mathbf{a}_{1,j} \cos x_j + (2\mathbf{a}_{2,j} - 3\mathbf{a}_{0,j}) \sin x_j - \mathbf{a}_{3,j}} \times \\
&\quad \times [-2 \cos 2x_{j+1} \sin(t - x_{j+1}) + 2 \sin(t + x_{j+1})(2 - \cos(t - x_{j+1})) - 2 \sin 2x_{j+1}] \times \\
&\quad \times [-4\mathbf{a}_{1,j+1} \cos^3 x_{j+1} + 4\mathbf{a}_{2,j+1} \cos^2 x_{j+1} \sin x_{j+1} + 6\mathbf{a}_{1,j+1} \cos x_{j+1} + \\
&\quad \quad + (2\mathbf{a}_{2,j+1} - 3\mathbf{a}_{0,j+1}) \sin x_{j+1} - \mathbf{a}_{3,j+1}]^{-1},
\end{aligned}$$

3) при  $t \in [x_{j+2}, x_{j+3})$  справедливо тождество  $\omega_j(t) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2 \cos 2x_{j+4} \sin(t - x_{j+4}) + 2 \sin(t + x_{j+4})(2 - \cos(t - x_{j+4})) - 2 \sin 2x_{j+4}}{-4\mathbf{a}_{1,j} \cos^3 x_{j+4} + 4\mathbf{a}_{2,j} \cos^2 x_{j+4} \sin x_{j+4} + 6\mathbf{a}_{1,j} \cos x_{j+4} + (2\mathbf{a}_{2,j} - 3\mathbf{a}_{0,j}) \sin x_{j+4} - \mathbf{a}_{3,j}} - \\
&\quad - [-4\mathbf{a}_{1,j-1} \cos^3 x_{j+4} + 4\mathbf{a}_{2,j-1} \cos^2 x_{j+4} \sin x_{j+4} + 6\mathbf{a}_{1,j-1} \cos x_{j+4} + \\
&\quad \quad + (2\mathbf{a}_{2,j-1} - 3\mathbf{a}_{0,j-1}) \sin x_{j+4} - \mathbf{a}_{3,j-1}] \times \\
&\quad \times [-4\mathbf{a}_{1,j} \cos^3 x_{j+4} + 4\mathbf{a}_{2,j} \cos^2 x_{j+4} \sin x_{j+4} + 6\mathbf{a}_{1,j} \cos x_{j+4} + (2\mathbf{a}_{2,j} - 3\mathbf{a}_{0,j}) \sin x_{j+4} - \mathbf{a}_{3,j}]^{-1} \times \\
&\quad \times [-2 \cos 2x_{j+3} \sin(t - x_{j+3}) + 2 \sin(t + x_{j+3})(2 - \cos(t - x_{j+3})) - 2 \sin 2x_{j+3}] \times \\
&\quad \times [-4\mathbf{a}_{1,j-1} \cos^3 x_{j+3} + 4\mathbf{a}_{2,j-1} \cos^2 x_{j+3} \sin x_{j+3} + 6\mathbf{a}_{1,j-1} \cos x_{j+3} + \\
&\quad \quad + (2\mathbf{a}_{2,j-1} - 3\mathbf{a}_{0,j-1}) \sin x_{j+3} - \mathbf{a}_{3,j-1}]^{-1},
\end{aligned}$$

4) при  $t \in [x_{j+3}, x_{j+4}]$  справедливо тождество  $\omega_j(t) =$   

$$= \frac{-2 \cos 2x_{j+4} \sin(t - x_{j+4}) + 2 \sin(t + x_{j+4})(2 - \cos(t - x_{j+4})) - 2 \sin 2x_{j+4}}{-4\mathbf{a}_{1,j} \cos^3 x_{j+4} + 4\mathbf{a}_{2,j} \cos^2 x_{j+4} \sin x_{j+4} + 6\mathbf{a}_{1,j} \cos x_{j+4} + (2\mathbf{a}_{2,j} - 3\mathbf{a}_{0,j}) \sin x_{j+4} - \mathbf{a}_{3,j}}.$$

Рассмотрим пример тригонометрических сплайнов, построенных на отрезке  $[\alpha, \beta] = [-1/2, 1/2]$ . Зададим сетку  $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j \mid x_j = j/10, j \in \mathbb{Z}\}$ . Функции  $\omega_{-5}(t), \omega_{-4}(t), \dots, \omega_0(t), \omega_1(t)$  изображены на рис. 1, их нормализованный вид показан на рис. 2.

Теперь исходную сетку  $X$  дополним новым узлом  $\xi$ , и на полученной таким образом сетке  $\bar{X}$  рассмотрим  $B_\varphi$ -сплайны  $\bar{\omega}_j(t)$ . Пусть  $\xi$  — упомянутый новый узел,  $\xi \in (0, 1/10)$ ,  $\xi = 1/20$ , а  $\bar{x}_j$  — узлы вновь полученной сетки:

$$\bar{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j \text{ при } j \leq 0, \quad \bar{x}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \xi = \frac{1}{20}, \quad \bar{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j-1} \text{ при } j \geq 2, \quad \bar{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}.$$

Для сетки  $\bar{X}$  функции  $\bar{\omega}_{-5}(t), \bar{\omega}_{-4}(t), \dots, \bar{\omega}_0(t), \bar{\omega}_1(t)$  построены на рис. 3.

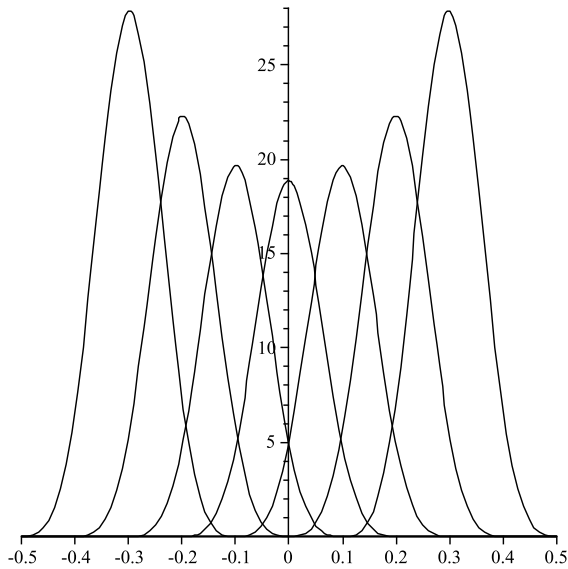


Рис. 1

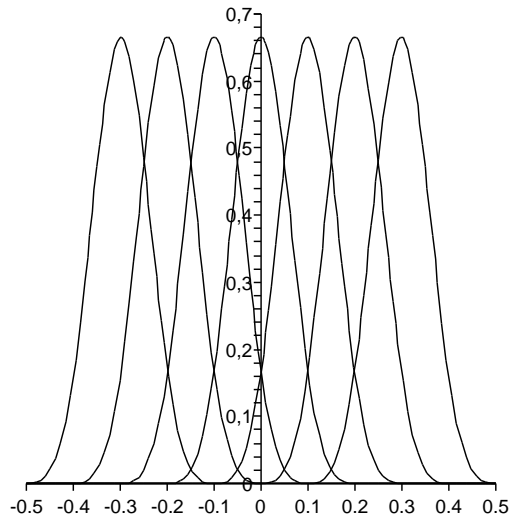


Рис. 2

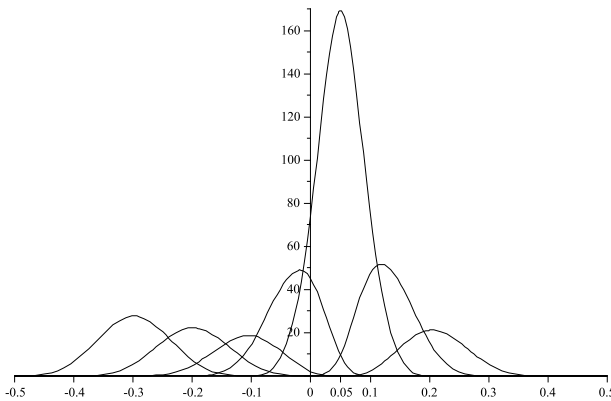


Рис. 3

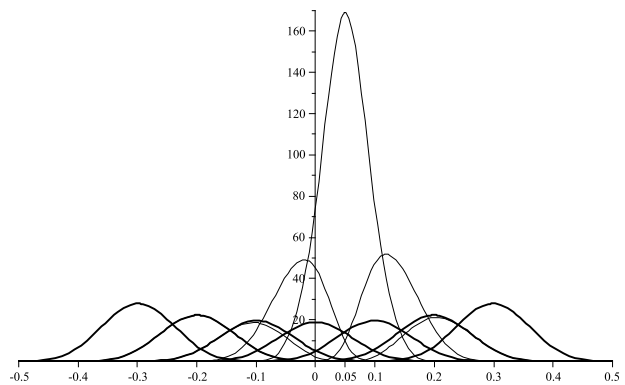


Рис. 4

Для  $t \in [-1/2, 1/2]$  справедливы калибровочные соотношения (см. (3.2)–(3.6) для  $k = 0$ ):

$$\begin{aligned} \omega_j(t) &\equiv \bar{\omega}_j(t) \text{ при } j \leq -4, & \omega_j(t) &\equiv \bar{\omega}_{j+1}(t) \text{ при } j \geq 1, \\ \omega_{-3}(t) &\equiv \bar{\omega}_{-3}(t) + \mathbf{p}_{-3,-2}\bar{\omega}_{-2}(t), & \omega_{-2}(t) &\equiv \mathbf{p}_{-2,-2}\bar{\omega}_{-2}(t) + \mathbf{p}_{-2,-1}\bar{\omega}_{-1}(t), \end{aligned}$$

$$\omega_{-1}(t) \equiv \mathbf{p}_{-1,-1}\bar{\omega}_{-1}(t) + \mathbf{p}_{-1,0}\bar{\omega}_0(t), \quad \omega_0(t) \equiv \mathbf{p}_{0,0}\bar{\omega}_0(t) + \bar{\omega}_1(t),$$

где

$$\mathbf{p}_{-3,-2} = 0.06555766782, \quad \mathbf{p}_{-2,-2} = 0.3146550180, \quad \mathbf{p}_{-2,-1} = 0.06260940193,$$

$$\mathbf{p}_{-1,-1} = 0.06555770088, \quad \mathbf{p}_{-1,0} = 0.3099112440, \quad \mathbf{p}_{0,0} = 0.07105152915.$$

Построим на новой сетке  $\bar{X}$  функции  $\omega_{-5}(t), \dots, \omega_1(t)$ , используя упомянутые выше калибровочные соотношения. На рис. 4 функции  $\omega_{-5}(t), \dots, \omega_1(t)$  изображены жирными линиями, а функции  $\bar{\omega}_{-5}(t), \dots, \bar{\omega}_1(t)$  — тонкими линиями.

## Список литературы

- [1] Демьянович Ю.К., Макаров А.А. Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Пробл. мат. анализа. Вып. 34. Межвуз. сб. / Под ред. Н.Н. Уральцевой. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2006. С. 39–54.
- [2] Демьянович Ю.К. Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 4. С. 1–4.
- [3] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. Я.М. Жилейкина. М.: Мир, 2005. 671 с.

*Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.*