Численное решение нестационарных уравнений Навье—Стокса

К. С. Иванов
Кемеровский государственный университет, Россия
e-mail:topspin83@mail.ru

In this paper we propose a method for solution of the non-stationary Navier—Stokes equations describing a viscous incompressible flow. Our method relies on the minimal residuals method with a multiparametric optimization based on a componentwise minimization for the residual norm of the approximate solution.

Введение

Рассмотрим в области G нестационарную систему уравнений Навье—Стокса, описывающую плоское движение вязкой однородной несжимаемой жидкости. В большинстве случаев данную систему записывают в переменных функция тока — вихрь и на каждом шаге по времени решают сначала линеаризованное уравнение переноса вихря для ω, затем уравнение Пуассона для функции тока ψ [1]. Преимущество такой постановки задачи — относительная простота реализации численного алгоритма. Однако такому подходу присущи и существенные недостатки: во-первых, на каждом временном шаге приходится решать два уравнения, одним из которых является уравнение Пуассона; во-вторых, возникают проблемы, связанные с постановкой краевых условий для вихря ω. Решению этих проблем посвящено достаточно большое количество работ (см., например, обзор в [2]). Менее популярны методы решения системы уравнений Навье—Стокса, записанной только относительно функции тока ψ [3]. Преимуществом такого подхода является отсутствие каких-либо существенных проблем постановки краевых условий для функции тока ψ. Однако в этом случае на каждом дискретном временном шаге необходимо решать системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений большой размерности.

1. Постановка задачи

Система уравнений Навье—Стокса, записанная в постановке $\psi - \omega$, имеет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} = \nu\Delta\omega, \tag{1}$$

$$\Delta\psi = \omega, \tag{2}$$

начальные условия

$$\psi|_{t=0} = \phi(x,y), x, y \in \overline{G}; \tag{3}$$

краевые условия

$$\psi|_{\partial G} = \psi_1(x,y,t), t \in [0;T], \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\partial G} = \psi_2(x,y,t), t \in [0;T]. \tag{5}$$

Наряду с традиционной постановкой дифференциальной задачи будем также рассматривать систему уравнений Навье—Стокса, записанную относительно только функции тока ψ:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta\psi\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta\psi\right)}{\partial y} = \nu\Delta\Delta\psi, \tag{6}$$

начальные условия

$$\psi\,|_{t=0} = \phi(x,y), \quad x, y \in G; \tag{7}$$

краевые условия

$$\psi\,|_{\partial G} = \psi_1(x,y,t), \quad t \in [0;T], \tag{8}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}\,|_{\partial G} = \psi_2(x,y,t), \quad t \in [0;T]. \tag{9}$$

В системах уравнений (1)–(5) и (6)–(9) $\nu > 0$ — коэффициент вязкости; $\phi(x,y)$, $\psi_1(x,y,t), \psi_2(x,y,t)$ — заданные функции своих аргументов; G — выпуклая односвязная область решения; ∂G — гладкая граница области G. Будем считать, что задачи (1)–(5) и (6)–(9) имеют единственное решение [4].

2. Численное моделирование

Введем в области G неравномерную по t, x, y, согласованную с границей ∂G сетку G_h. Аппроксимируя задачи (1)–(5) и (6)–(9) на сетке G_h некоторыми разностными схемами, получим разностные задачи:

$$\frac{\omega_h^{n+1/2} - \omega_h^n}{\tau/2} + L_{hx}^{n+1}\omega_h^{n+1/2} + L_{hy}^{n+1}\omega_h^n = f_h^{n+1/2}; \tag{10}$$

$$\frac{\omega_h^{n+1} - \omega_h^{n+1/2}}{\tau/2} + L_{hx}^{n+1}\omega_h^{n+1/2} + L_{hy}^{n+1}\omega_h^{n+1} = f_h^{n+1}; \tag{11}$$

$$\Lambda_h\psi_h^{n+1} = \omega_h^{n+1}; \tag{12}$$

$$\omega_h^{n+1}|_{\partial G} = M_h\psi_h^n; \tag{13}$$

$$\psi_h^{n+1}|_{\partial G} = \phi_h^{n+1} \tag{14}$$

и

$$\frac{\Lambda_h\psi_h^{n+1} - \Lambda_h\psi_h^n}{\tau_n} + L_h^{n+1}\psi_h^{n+1} = f_h^{n+1}; \tag{15}$$

$$K_h\psi_h^{n+1} = g_h^{n+1}. \tag{16}$$

В задачах (10)–(14) и (15), (16) Λ_h есть некоторая аппроксимация оператора Лапласа; L_{hx}^{n+1}, L_{hy}^{n+1} и L_h^{n+1} — некоторые аппроксимации конвективных слагаемых в уравнениях движения (1) и (6); M_h — какой-либо вариант условий Тома [2], а уравнение (16) есть разностный аналог краевых условий (8) и (9). Заметим, что операторы L_{hx}^{n+1}, L_{hy}^{n+1} и L_h^{n+1} могут быть как линейными, так и нелинейными в зависимости от способа аппроксимации конвективных слагаемых в (1) и (6). В случае, если для аппроксимации этих величин используются значения на верхнем временном слое, то указанные операторы являются нелинейными, в случае же использования для аппроксимации конвективных слагаемых значений с нижнего временного слоя данные операторы станут линейными и мы получим линеаризованные разностные схемы.

3. Метод решения

Независимо от способа аппроксимации конвективных слагаемых разностные задачи (10)–(14) и (15), (16) для каждого дискретного момента времени можно записать как систему алгебраических уравнений вида

$$A(u,u) = f, \tag{17}$$

где u, f — векторы размерности m (число узлов сетки); $A(u,v) = A_1(u,v) + A_2 v$, A_2 — линейный оператор, A_1 — билинейное отображение, обладающее следующим свойством:

$$\begin{gathered} A_1(\xi_1 u^{(1)} + \xi_2 u^{(2)}, \eta_1 v^{(1)} + \eta_2 v^{(2)}) = \xi_1\eta_1 A_1(u^{(1)}, v^{(1)}) + \\ + \xi_1\eta_2 A_1(u^{(1)}, v^{(2)}) + \xi_2\eta_1 A_1(u^{(2)}, v^{(1)}) + \xi_2\eta_2 A_1(u^{(2)}, v^{(2)}), \end{gathered} \tag{18}$$

$u^{(i)}, v^{(i)}$ — произвольные векторы размерности m; ξ_i, η_i — произвольные постоянные, $i = 1, 2$.

Отметим, что в случае линеаризованных разностных схем на каждом шаге по времени мы имеем систему линейных алгебраических уравнений ($A_1 \equiv 0$), матрица которой, однако, зависит от временного слоя. При этом достаточно сложно установить некоторые свойства матрицы получившейся системы линейных алгебраических уравнений (например, неособенность и знакоопределенность), которые позволили бы применять богатый арсенал методов для ее решения [5]. В случае же нелинейной (билинейной) системы алгебраических уравнений ($A_1 \neq 0$) данная проблема еще более обостряется. Очевидно, что для решения системы (17) необходимо использовать такие методы, которые позволяли бы получать ее решение с использованием минимальной информации о свойствах оператора A.

Независимо от того, является ли система (17) линейной или нелинейной, для ее решения построим единообразный итерационный процесс [6]

$$u^{n+1/2} = u^n - \tau_{n+1}[A(u^n, u^n) - f]; \tag{19}$$

$$u^{n+1} = u^{n+1/2} + \alpha_{n+1} x^n, n = 1, 2 \ldots, \tag{20}$$

где x^n — некоторый вектор размерности m; u^0 — произвольное начальное приближение из области определения оператора А; τ_{n+1}, α_{n+1} — итерационные параметры.

Пусть α_{n+1} — квадратная матрица с m ненулевыми элементами $\alpha_{k_i j}^{n+1}$, $i, j = 1...m$, k — произвольное целое число от 1 до m. Перепишем (20) в виде

$$u^{n+1} = y_{p-1}^{n+1/2} + \sum_{i=p}^{m} \alpha_{k_i j}^{n+1} e^{k_i}, \quad p, j = 1, 2 \ldots m, \tag{21}$$

где $y_{p-1}^{n+1/2} = u^{n+1/2} + \alpha_{k_i j}^{n+1} e^{k_1} + ... + \alpha_{k_{p-1} j}^{n+1} e^{k_{p-1}}$, $y_0^{n+1/2} = u^{n+1/2}$, e^{k_i} — вектор с одной ненулевой k_i-й компонентой.

Введем обозначение:

$$r_{(i)}^{n+1/2} = A\left[y_{i-1}^{n+1/2} + \alpha_{k_i j}^{n+1} e^{k_i}, y_{i-1}^{n+1/2} + \alpha_{k_i j}^{n+1} e^{k_i}\right] - f, \quad i = 1, 2 \ldots m. \tag{22}$$

Очевидно, что $r^{n+1} = r_m^{n+1/2} = A(u^{n+1}, u^{n+1}) - f$ и $r_0^{n+1/2} = r^n = A(u^n, u^n) - f$ — невязки схемы (20). Переписывая (21) относительно нормы невязки и выбирая $\alpha_{k_i j}^{n+1}$ из условия минимума $\left\|{r_i}^{n+1/2}\right\|^2$ [6], можно получить

$$\left\|{r_i}^{n+1/2}\right\| \leq \left\|r_{i-1}^{n+1/2}\right\|, \quad i = 1, 2 \ldots m, \ n = 1, 2 \ldots \tag{23}$$

Неравенство (23) означает, что на каждом итерационном шаге норма вектора невязки не возрастает. Необходимо отметить, что в случае линейной системы уравнений ($A_1 \equiv 0$) можно показать [7], что $\|r^n\| \to 0$, при $n \to \infty$, т. е. итерационный процесс (19), (20) сходится при любом начальном приближении.

Приведенный алгоритм означает, что элементы матрицы α_{n+1} выбираются последовательно, исходя из условия минимума соответствующей невязки. В ряде случаев удается использовать не последовательную, а многопараметрическую оптимизацию [7]. В этом случае

$$u_i^{n+1/2} = u_{i-1}^{n+1/2} + \alpha_{k_1}^{n+1} z_{k_1}^n + ... + \alpha_{k_l}^{n+1} z_{k_l}^n, \tag{24}$$

$$r_i^{n+1/2} = A(u_i^{n+1/2}, u_i^{n+1/2}) - f, \quad i = 1, 2 \ldots, \tag{25}$$

и итерационные параметры $\alpha_{k_1}^{n+1} \ldots \alpha_{k_l}^{n+1}$, составляющие группу, выбираются из условия глобального минимума нормы вектора $r_i^{n+1/2}$. Для их определения на каждом итерационном шаге необходимо решить систему алгебраических уравнений (линейных или нелинейных в зависимости от исходного оператора), размерность которой равна числу итерационных параметров в группе. Например, если оператор A является линейным, то система линейных алгебраических уравнений для определения итерационных параметров $\alpha_{k_1}^{(n+1)} \ldots \alpha_{k_l}^{(n+1)}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} (A\mathbf{z}_{k_1}^n, A\mathbf{z}_{k_1}^n) & (A\mathbf{z}_{k_1}^n, A\mathbf{z}_{k_2}^n) & \ldots & (A\mathbf{z}_{k_1}^n, A\mathbf{z}_{k_l}^n) \\ (A\mathbf{z}_{k_2}^n, A\mathbf{z}_{k_1}^n) & (A\mathbf{z}_{k_2}^n, A\mathbf{z}_{k_2}^n) & \ldots & (A\mathbf{z}_{k_2}^n, A\mathbf{z}_{k_l}^n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (A\mathbf{z}_{k_l}^n, A\mathbf{z}_{k_1}^n) & (A\mathbf{z}_{k_2}^n, A\mathbf{z}_{k_l}^n) & \ldots & (A\mathbf{z}_{k_l}^n, A\mathbf{z}_{k_l}^n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{k_1}^{n+1} \\ \alpha_{k_2}^{n+1} \\ ... \\ \alpha_{k_l}^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (A\mathbf{z}_{k_1}^n, r_i^{n+1/2}) \\ (A\mathbf{z}_{k_2}^n, r_i^{n+1/2}) \\ ... \\ (A\mathbf{z}_{k_l}^n, r_i^{n+1/2}) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Отметим, что в большинстве случаев матрица исходного оператора имеет блочно-диагональную структуру. Например, при решении разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона матрица оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(n)} & a_{1,2}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & a_{1,6}^{(n)} & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,1}^{(n)} & a_{2,2}^{(n)} & a_{2,3}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & a_{2,7}^{(n)} & 0 & \dots \\ 0 & a_{3,2}^{(n)} & a_{3,3}^{(n)} & a_{3,4}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & a_{3,8}^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & a_{4,3}^{(n)} & a_{4,4}^{(n)} & a_{4,5}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4}^{(n)} & a_{5,5}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{6,1}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6}^{(n)} & a_{6,7}^{(n)} & 0 & \dots \\ 0 & a_{7,2}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & a_{7,6}^{(n)} & a_{7,7}^{(n)} & a_{7,8}^{(n)} & \dots \\ 0 & 0 & a_{8,3}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & a_{8,7}^{(n)} & a_{8,8}^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{27}$$

поэтому, если итерационные параметры сгруппировать следующим образом:

$$\begin{array}{l} \{\alpha_1^{n+1}, \alpha_4^{n+1}, \alpha_{12}^{n+1}, \alpha_{15}^{n+1}, \dots\}, \{\alpha_2^{n+1}, \alpha_5^{n+1}, \alpha_{13}^{n+1}, \alpha_{16}^{n+1}, \dots\}, \\ \{\alpha_3^{n+1}, \alpha_6^{n+1}, \alpha_{14}^{n+1}, \alpha_{17}^{n+1}, \dots\}, \{\alpha_7^{n+1}, \alpha_{10}^{n+1}, \alpha_{18}^{n+1}, \alpha_{21}^{n+1}, \dots\}, \\ \{\alpha_8^{n+1}, \alpha_{11}^{n+1}, \alpha_{19}^{n+1}, \alpha_{22}^{n+1}, \dots\}, \{\alpha_9^{n+1}, \alpha_{12}^{n+1}, \alpha_{20}^{n+1}, \alpha_{23}^{n+1}, \dots\}, \end{array} \tag{28}$$

то матрицы систем линейных алгебраических уравнений для их определения будут иметь диагональный вид и решение таких систем не представляет трудностей.

Особо отметим случай, когда оптимизация проводится по всем итерационным параметрам $\alpha_1^{n+1} \dots \alpha_m^{n+1}$ одновременно. Для определения данных параметров необходимо решить систему алгебраических уравнений, размерность которой совпадает с размерностью исходной системы. Например, в линейном случае система уравнений для определения $\alpha_1^{n+1} \dots \alpha_m^{n+1}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (A\mathbf{z}_1^n, A\mathbf{z}_1^n) & (A\mathbf{z}_1^n, A\mathbf{z}_2^n) & \dots & (A\mathbf{z}_1^n, A\mathbf{z}_m^n) \\ (A\mathbf{z}_2^n, A\mathbf{z}_1^n) & (A\mathbf{z}_2^n, A\mathbf{z}_2^n) & \dots & (A\mathbf{z}_2^n, A\mathbf{z}_m^n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\mathbf{z}_m^n, A\mathbf{z}_1^n) & (A\mathbf{z}_m^n, A\mathbf{z}_2^n) & \dots & (A\mathbf{z}_m^n, A\mathbf{z}_m^n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1^{n+1} \\ \alpha_2^{n+1} \\ \dots \\ \alpha_m^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A\mathbf{z}_1^n, r^{n+1/2}) \\ (A\mathbf{z}_2^n, r^{n+1/2}) \\ \dots \\ (A\mathbf{z}_m^n, r^{n+1/2}) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

В общем случае решение системы представляет не меньше трудностей, чем решение исходной системы уравнений. Однако, если выбрать векторы $z_1^-, z_2^- \dots z_m^-$ так, чтобы $(Az_i^-, Az_j^-) = 0$, $i \neq j$, то матрица системы уравнений для определения $\alpha_1^{n+1} \dots \alpha_m^{n+1}$ будет иметь диагональный вид и определение точного решения данной системы уже не представляет труда. Более того, можно показать [7], что в линейном случае при таком выборе итерационных параметров схема (19), (20) будет сходиться к точному решению за одну итерацию.

Алгоритм групповой оптимизации по всем параметрам одновременно оказывается весьма полезным при проведении серийных расчетов нестационарных задач в линейном случае. Например, если использовать разностную схему (10)–(14) для решения нестационарной системы уравнений Навье—Стокса, то можно заметить, что на каждом дискретном временном шаге возникает необходимость в решении разностного уравнения Пуассона, где разностный оператор не зависит от временного шага. Поэтому для решения данной задачи можно использовать алгоритм с полной групповой оптимизацией, затратив на первом дискретном временном шаге некоторое время на построение указанной выше системы векторов $z_1^-, z_2^- \dots z_m^-$. На каждом последующем временном шаге, используя данную систему векторов, получим схему, сходящуюся за одну итерацию к точному решению. Также при проведении новых расчетов можно использовать уже полученную однажды систему векторов $z_1^-, z_2^- \dots z_m^-$, если, конечно, при этом не изменяется структура разностного оператора (например, расчеты при различных коэффициентах вязкости).

Если система (17) нелинейная, то в случае плохой сходимости схемы (19), (20) для нее аналогично линейному случаю [8] можно построить процедуру ускорения сходимости, суть которой заключается в комбинации приближений схемы (19), (20) на n-м и $(n+2)$-м итерационных шагах:

$$x^{n+2} = (1+\omega_n)u^{n+2} - \omega_n u^n, \tag{30}$$

где u^{n+2}, u^n — приближения схемы (19), (20), а ω_n выбирается из условия [7]

$$\min ||\,\overline{r}^{n+2}\,|| = \min ||A(x^{n+2}, x^{n+2}) - f||. \tag{31}$$

Заключение

Для оценки предложенного метода решения задач (1)–(5) и (6)–(9) проведены численные расчеты классической модельной задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости в квадратной каверне с неравномерно движущейся верхней крышкой и задачи об обтекании вязкой однородной несжимаемой жидкостью обратного уступа. Расчеты проводились при различных значениях коэффициента вязкости и при различных функциях скорости движения крышки и входного потока. Проведенные расчеты показали эффективность предложенных алгоритмов. При достаточно больших значениях шага по времени получены устойчивые результаты. Также обнаружены нестационарные решения данных задач при стационарных краевых условиях.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер с англ. М.: Мир, 1980. 616 с.

[3] Beam R.M. Newton's methods for the Navier—Stokes equations // Comput. Mech. 1988. Vol. 2. P. 51.II.1–51.II.4.

[4] Ладыженская А.О. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 340 с.

[5] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений: Учебник для вузов М.: Наука, 1978. 592 с.

[6] Захаров Ю.Н., Егорова Е.Ф., Толстых М.А., Шокин Ю.И. Метод минимальных невязок решения одного класса нелинейных уравнений. Красноярск, 1991 (Препр. № 9).

[7] Захаров Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004. 238 с.

[8] Николаев Е.С. Нелинейное ускорение двухслойных итерационных методов вариационного типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. № 6. С. 1387.

Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.