Исследование сходимости одного неявного итерационного алгоритма для решения стационарных уравнений тепловой конвекции

П. Б. Бейсебай
Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан
e-mail: beisebai@mail.ru

Linear and nonlinear implicit iterative fission finite differences algorithms for solving the stationary system of equations describing free convection are considered. The schemes are based on the displaced grids with symmetrical approximation. Convergence of iterative processes is examined.

В параллелепипеде $D = \{0 < x_\alpha < 1,\ \alpha = \overline{1, N}\}$, где N — размерность пространства, рассмотрим систему стационарных уравнений свободной конвекции в безразмерных переменных

$$(\mathbf{u}\,\nabla)\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \Delta \mathbf{u} - \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}\mathrm{Gr}\,\theta + \mathbf{f}(x), \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

$$(\mathbf{u}\nabla)\theta = \frac{1}{\mathrm{P}r}\Delta\theta + g(x), \tag{3}$$

где $\mathbf{f}(x)$, $g(x)$ — заданные функции; $\mathbf{u} = (U, V, W)$ — вектор скорости; p — давление, отсчитываемое от гидростатического; θ — температура; $\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести; $\mathrm{Gr} = \dfrac{g\beta\theta L}{\nu^2}$ — число Грасгофа; ν — кинематический коэффициент вязкости; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; χ — коэффициент теплопроводности.

Предполагается, что на границах расчетной области компоненты вектора скорости и температура принимают однородные нулевые значения, т. е.

$$\mathbf{u}\big|_{\partial D} = \theta\big|_{\partial D} = 0. \tag{4}$$

Численному исследованию дифференциальных задач тепловой конвекции, описываемых уравнениями (1)–(3), посвящено немало работ [1]. Разработанные вычислительные алгоритмы позволяют изучить конвективные течения несжимаемой жидкости в широком диапазоне параметров среды. Однако математическое обоснование применимости используемых на практике алгоритмов отсутствует.

В работах [2, 3] для численного решения сеточных уравнений тепловой конвекции, соответствующих разностному аналогу дифференциальной задачи (1)–(4), рассмотрены итерационные схемы, основанные на аппроксимации конвективных слагаемых по формуле Самарского [4], исследованы вопросы устойчивости и численной реализации. Исследование сходимости итерационных алгоритмов, предложенных в работах [2, 3], ввиду того, что коэффициент схемной вязкости нелинейно зависит от значений компонент скорости, затруднительно.

В данной работе для разностных аналогов уравнений (1)–(3), записанных на смещенных сетках с симметричной аппроксимацией, рассмотрим итерационный алгоритм расщепления следующего вида:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1/2}-\mathbf{u}^{n}}{\tau}+L_{h,\mathbf{u}}\mathbf{u}^{n+1/2}+\overline{\operatorname{grad}}_h p^n=\Delta_h\mathbf{u}^{n+1/2}-\frac{\mathrm{Gr}\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}\theta^{n+1}+\mathbf{f}(x), \tag{5}$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{n+1/2}}{\tau}+\overline{\operatorname{grad}}_h(p^{n+1}-p^n)=0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div}_h\mathbf{u}^{n+1}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\theta^{n+1}-\theta^{n}}{\tau}+L_{h,\theta}\theta^{n+1}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta_h\theta^{n+1}+g(x), \tag{8}$$

с начальными и однородными нулевыми краевыми условиями, и будем изучать вопросы сходимости. Здесь и в дальнейшем обозначения такие же, как и в работе [3].

Ограниченность итераций алгоритма (5)–(8) можно показать, используя для аппроксимации конвективных членов “энергетически нейтральные” операторы $L_{h,\mathbf{u}}$ и $L_{h,\theta}$, т. е. такие, для которых выполняются равенства

$$(L_{h,\mathbf{u}}V,V)=0,\quad (L_{h,\theta}V,V)=0,$$

$\forall V\in\Omega_h^0(D_h)$ — пространство сеточных функций с нулевыми значениями на границе.

Введем погрешности итерации

$$\mathbf{z}^{n+1/2}=\mathbf{u}^{n+1/2}-\mathbf{u},\quad \mathbf{z}^{n}=\mathbf{u}^{n}-\mathbf{u},$$

$$\pi^n=p^n-p,\quad T^n=\theta^n-\theta,$$

где $\mathbf{u}$, p, θ — решение соответствующей сеточной стационарной разностной задачи для (1)–(4).

Сначала рассмотрим линейный случай, т. е. случай, когда конвективные слагаемые отсутствуют. Уравнения для погрешности при этом имеют вид

$$\frac{\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}}{\tau}+\overline{\operatorname{grad}}_h\pi^n=\Delta_h\mathbf{z}^{n+1/2}-\frac{\mathrm{Gr}}{|\mathbf{g}|}\mathbf{g}T^{n+1}, \tag{9}$$

$$\frac{\mathbf{z}^{n+1}-\mathbf{z}^{n+1/2}}{\tau}+\overline{\operatorname{grad}}_h(\pi^{n+1}-\pi^n)=0, \tag{10}$$

$$\operatorname{div}_h\mathbf{z}^{n+1}=0, \tag{11}$$

$$\frac{T^{n+1}-T^{n}}{\tau}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta_hT^{n+1} \tag{12}$$

с однородными краевыми условиями для компонент скорости и температуры. Видим, что в этом случае задача конвективного движения распадается на две задачи.

Для погрешности температуры T^{n+1} из (12) имеем

$$\left\|T^{n+1}\right\|^2 - \|T^n\|^2 + \left\|T^{n+1} - T^n\right\|^2 + \frac{2\tau}{\mathrm{Pr}}\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2 = 0.$$

Отсюда

$$\left\|T^{n+1}\right\| \leqslant q\|T^n\| \leqslant \ldots \leqslant q^n\left\|T^0\right\|,$$

где $q = \left(1 + \dfrac{2\tau}{\mathrm{Pr}}c_0\right)^{-1}$; c_0 — константа, не зависящая от параметра сетки, т. е. $\|T^n\|$ стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии.

Умножая (9) скалярно на $2\tau\mathbf{z}^{n+1/2}$, имеем

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2 - \|\mathbf{z}^n\|^2 + \left\|\mathbf{z}^{n+1/2} - \mathbf{z}^n\right\|^2 - 2\tau\left(\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^n, \mathbf{z}^{n+1/2}\right) + 2\tau\left\|\mathbf{z}_x^{n+1/2}\right\|^2 \leqslant\\ \leqslant 2\tau\mathrm{Gr}\left|\left(\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}T^{n+1}, \mathbf{z}^{n+1/2}\right)\right|.\end{aligned}$$

Используя (10), после несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + \tau\left\|\mathrm{grad}_h\pi^{n+1}\right\|^2 + \left\|\mathbf{z}^{n+1/2} - \mathbf{z}^n\right\|^2 + 2\tau\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\| \leqslant\\ \leqslant \|\mathbf{z}^n\|^2 + \tau^2\|\mathrm{grad}_h\pi^n\|^2 + 2\tau\frac{\mathrm{Gr}}{|\mathbf{g}|}\left|\left(\mathbf{g}T^{n+1}, \mathbf{z}^{n+1/2}\right)\right|.\end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Коши—Буняковского, теорему вложения и ε-неравенство, получим

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + \tau^2\left\|\mathrm{grad}_h\pi^{n+1}\right\|^2 + \left\|\mathbf{z}^{n+1/2} - \mathbf{z}^n\right\|^2 + 2\tau\left(1 - \frac{\varepsilon_1\mathrm{Gr}}{\delta_0}\right)\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2 \leqslant\\ \leqslant \|\mathbf{z}^n\|^2 + \tau^2\|\mathrm{grad}_h\pi^n\|^2 + \frac{\tau\mathrm{Gr}}{2\delta_0\varepsilon_1}\left\|\nabla_h T^{n+1/2}\right\|^2,\end{aligned} \tag{13}$$

где ε_1 — произвольное положительное число, δ_0 — минимальное собственное число разностного оператора Лапласа.

Запишем энергетическое соотношение для погрешности температуры с произвольным ε_2, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon_2 \leqslant 1$, в следующей форме:

$$\left\|T^{n+1} - T^n\right\|^2 + \left\|T^{n+1}\right\|^2 + \frac{2\tau}{\mathrm{Pr}}(1 - \varepsilon_2)\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2 + \frac{2\tau}{\mathrm{Pr}}\varepsilon_2\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2 = \|T^n\|^2.$$

Умножая на $\dfrac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}$, где $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}$ — число Рэлея, имеем

$$\frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\left\|T^{n+1}\right\|^2 + \frac{\tau\mathrm{Gr}}{2\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}(1 - \varepsilon_2)\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2 + \frac{\tau\mathrm{Gr}}{2\delta_0\varepsilon_1}\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2 \leqslant \frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\|T^n\|^2.$$

Полученное выражение сложим с (**??**):

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + \tau^2\|\mathrm{grad}_h\pi^n\|^2 + \frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\left\|T^{n+1}\right\|^2 + 2\tau\left(1 - \frac{\varepsilon_1\mathrm{Gr}}{\delta_0}\right)\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2 +\\ + \left\|\mathbf{z}^{n+1/2} - \mathbf{z}^n\right\|^2 + \frac{\tau\mathrm{Gr}\,(1 - \varepsilon_2)}{2\delta_0}\left\|\nabla_h T^{n+1/2}\right\|^2 \leqslant \|\mathbf{z}^n\|^2 + \tau^2\|\mathrm{grad}_h\pi^n\|^2 + \frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\|T^n\|^2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$E^{n+1}+\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|^{2}+2\tau\left(1-\frac{\varepsilon_1 \mathrm{Gr}}{\delta_0}\right)\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^{2}+\frac{\tau\mathrm{Gr}\,(1-\varepsilon_2)}{2\delta_0}\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^{2}\leqslant E^{n}, \quad (14)$$

где

$$E^{n}=\|\mathbf{z}^{n}\|^{2}+\tau^{2}\|\mathrm{grad}_h\pi^{n}\|^{2}+\frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\|T^{n}\|^{2}.$$

Отсюда следует сходимость итерационного процесса.

Для расчета скорости сходимости итерационного процесса соотношение (9) запишем в виде

$$\tau\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^{n}=\tau\Delta_h\mathbf{z}^{n+1/2}-\frac{\tau\mathrm{Gr}\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}T^{n+1}-\left(\mathbf{z}^{n+1/2}\mathbf{z}^{n}\right)$$

и, используя неравенство треугольника, имеем

$$\tau\left\|\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^{n}\right\|\leqslant\tau\left\|\Delta_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|+\frac{\tau\mathrm{Gr}}{\delta_0}\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|+\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\mathbf{z}^{n}\right\|. \quad (15)$$

Введем обозначения

$$A=2\left(1-\frac{\varepsilon_1\mathrm{Gr}}{\delta_0}\right),\quad B=\frac{\mathrm{Gr}\,(1-\varepsilon_2)}{2\delta_0}$$

и запишем соотношение (15) в следующей форме:

$$\tau\|\mathrm{grad}_h\pi^{n}\|\leqslant\frac{c_0\tau\sqrt{A}}{\sqrt{A}\;h}\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|+\frac{\tau\mathrm{Gr}\sqrt{B}}{\sqrt{B}\;\delta_0}\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|+\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\mathbf{z}^{n}\right\|.$$

Возведя обе части в квадрат, имеем

$$\tau^{2}\|\mathrm{grad}_h\pi^{n}\|^{2}\leqslant M\left(\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\mathbf{z}^{n}\right\|^{2}+\tau A\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^{2}+\tau B\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^{2}\right), \quad (16)$$

где $M=1+\dfrac{\tau c_0^2}{A\,h^2}+\dfrac{\tau\mathrm{Gr}^2}{\delta_0^2 B}$.

Умножив неравенство (16) на произвольное положительное число α и прибавив к соотношению (14), имеем

$$E^{n+1}+(1-\alpha M)\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\mathbf{z}^{n}\right\|^{2}+\tau A\,(1-\alpha M)\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^{2}+\alpha\tau^{2}\|\mathrm{grad}_h\pi^{n}\|^{2}+$$
$$+(1-\alpha M)\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^{2}\leqslant E^{n}.$$

Выбирая число α, удовлетворяющим условиям $1-\alpha M\geqslant\alpha_0>0$ и $0<\alpha\leqslant 1$, имеем

$$(1+\tau A\alpha_0\delta_0)\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^{2}+\tau^{2}\left\|\mathrm{grad}_h\pi^{n+1}\right\|^{2}+\frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1+\frac{4\tau B\alpha_0}{\mathrm{Ra}}\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\left\|T^{n+1}\right\|^{2}\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathbf{z}^{n}\|^{2}+\frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\|T^{n}\|^{2}+\tau^{2}\,(1-\alpha)\,\|\mathrm{grad}_h\pi^{n}\|^{2}. \quad (17)$$

Перепишем неравенство (17) следующим образом:

$$(1+\tau A\alpha_0\delta_0)\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2+\tau^2\left\|\mathrm{grad}_h\pi^{n+1}\right\|^2+\frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1+\frac{4\tau B\alpha\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\mathrm{Ra}}\right)\left\|T^{n+1}\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant(1+\tau A\alpha_0\delta_0)\frac{1}{1+\tau A\alpha_0\delta}\|\mathbf{z}^n\|^2+\tau^2(1-\alpha)\|\pi^n\|^2+$$
$$+\frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1+\frac{4\tau B\alpha\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\mathrm{Ra}}\right)\frac{1}{1+\dfrac{4\tau B\alpha\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\mathrm{Ra}}}\|T^n\|^2.$$

Следовательно, имеем

$$F^{n+1}\leqslant qF^n,$$

где

$$F^n=(1+\tau A\alpha_0\delta_0)\|\mathbf{z}^n\|^2+\tau^2\|\mathrm{grad}_h\pi^n\|^2+\frac{\mathrm{Ra}}{4\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1+\frac{4\tau B\alpha\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\mathrm{Ra}}\right)\|T^n\|^2,$$

$$q=\min\left\{\frac{1}{1+\tau A\varepsilon_0\delta},\ 1-\alpha,\ \frac{1}{1+\dfrac{4\delta B\alpha\delta_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\mathrm{Ra}}}\right\}<1,$$

т. е. величина F^n стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем строго меньше единицы.

Заметим, что если выбрать $\alpha\approx O(h)$, то выполнение условия $1-\alpha M\geqslant\alpha_0>0$ равносильно выбору итерационного параметра τ, удовлетворяющего соотношению $\tau\leqslant Mh$, где $M>0$ — равномерно ограниченная константа, и скорость сходимости будет иметь первый порядок по пространственным шагам разностной сетки.

Рассмотрим теперь нелинейный алгоритм. В этом случае уравнения для погрешности имеют вид

$$\frac{\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^n}{\tau}+L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{u}^n)\mathbf{z}^{n+1/2}+L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{z}^n)\mathbf{u}+\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^n=\Delta_h\mathbf{z}^{n+1/2}-\frac{\mathrm{Gr}}{|\mathbf{g}|}\mathbf{g}T^{n+1},\tag{18}$$

$$\frac{\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^n}{\tau}+\overline{\mathrm{grad}}_h(\pi^{n+1}-\pi^n)=0,\tag{19}$$

$$\mathrm{div}_h\mathbf{z}^{n+1}=0,\tag{20}$$

$$\frac{T^{n+1}-T^n}{\tau}+L_{h,\theta}(\mathbf{u}^n)T^{n+1}+L_{h,\theta}(\mathbf{z}^n)\,\theta=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta_hT^{n+1}.\tag{21}$$

Умножая (18) на $2\tau\mathbf{z}^{n+1/2}$ и рассуждая так же, как и в линейном случае, имеем для погрешности компонент вектора скорости и давления

$$\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2+\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^n\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^{n+1}\right\|^2+\tau\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathbf{z}^n\|^2+\tau\left\|\overline{\mathrm{grad}}\pi^n\right\|^2+\tau\left\|\nabla_hT^{n+1}\right\|^2+2\tau\left|\left(L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{z}^n)\,\mathbf{u},\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\right|$$

и для погрешности температуры

$$\left\|T^{n+1}\right\|^2+\left\|T^{n+1}-T^n\right\|^2+\frac{2\tau}{\mathrm{Pr}}(1-\varepsilon)\left\|\nabla_hT^{n+1}\right\|^2\leqslant\|T^n\|^2+2\tau\left|\left(L_{h,\theta}(\mathbf{z}^n)\,\theta,T^{n+1}\right)\right|.$$

Оценим вклад нелинейных слагаемых на погрешности следующим образом:

$$\left|\left(L_{h,\mathbf{u}}\left(\mathbf{z}^{n}\right)\mathbf{u},\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\right| \leqslant \left|\left(L_{h,\mathbf{u}}\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)\mathbf{u},\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\right| + \left|\left(L_{h,\mathbf{u}}\left(\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\mathbf{u},\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_0\|\nabla_h\mathbf{u}\|\left(\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|_{L_4(D_n)}\cdot\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|_{L_4(D_n)}+\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2_{L_4(D_n)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant \bar{c}_1\|\nabla_h\mathbf{u}\|\left(\left\|\nabla_h\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)\right\|\cdot\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|+\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2\right),$$

$$\left|\left(L_{h,\theta}\left(\mathbf{z}^{n}\right)\theta,T^{n+1}\right)\right| \leqslant \left|\left(L_{h,\theta}\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)\theta - L_{h,\mathbf{u}}\left(\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\theta,T^{n+1}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\left(L_{h,\theta}\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)\theta,T^{n+1}\right)\right| + \left|\left(L_{h,\theta}\left(\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\theta,T^{n+1/2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_0\|\nabla_h\theta\|\left(\left\|\nabla\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)\right\|\cdot\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|+\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|\cdot\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|\right).$$

Далее, используя ε-неравенство, из этих соотношений имеем

$$\left|\left(L_{h,\mathbf{u}}\left(\mathbf{z}^{n}\right)\mathbf{u},\mathbf{z}^{n+1/2}\right)\right| \leqslant \bar{c}_1\|\nabla_h\mathbf{u}\|\left((1+\varepsilon_3)\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left\|\nabla_h\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)\right\|^2\right),$$

$$\left\|T^{n+1}\right\|^2+\left\|T^{n+1}-T^{n}\right\|^2+\frac{2\tau}{\Pr}\left(1-\varepsilon_0 c_0\Pr\|\nabla_h\theta\|\right)(\varepsilon_4+\varepsilon_5)\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2+$$
$$+\frac{2\tau}{\Pr}\varepsilon_6\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2 \leqslant \frac{\tau\, c_0\|\nabla_h\theta\|}{2\varepsilon_4 h^2}\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|^2_{L_2(D_n)}+\frac{\tau\, c_0\|\nabla_h\theta\|}{2\varepsilon_5}\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2, \qquad (22)$$

$$\left\|\mathbf{z}^{n+}\right\|^2+\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^{n+1}\right\|^2+\tau A\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathbf{z}^{n}\|^2+\tau^2\left\|\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^{n}\right\|^2+\tau B\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2+2\tau\bar{c}_1\|\nabla_h\mathbf{u}\|\,(1+\varepsilon_3)\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2+$$
$$+\frac{\tau}{2\varepsilon_3 h^2}c_1\|\nabla_h\mathbf{u}\|\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|^2,$$

$$\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2+\left(1-\frac{\tau\, c_1\|\nabla_h\mathbf{u}^{n}\|^2}{2\varepsilon_3 h^2}\right)\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|^2+\tau^2\left\|\overline{\mathrm{grad}}\pi^{n+1}\right\|^2+\tau\left[A-2c_1\|\nabla_h\mathbf{u}\|^2\times\right.$$
$$\left.\times(1+\varepsilon)\right]\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2\leqslant\|\mathbf{z}^{n}\|^2+\tau^2\left\|\overline{\mathrm{grad}}_h\pi^{n}\right\|^2+\tau B\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2. \qquad (23)$$

Перепишем соотношение (18) в следующем виде

$$\tau\mathrm{grad}_h\pi^{n}=-\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)+\tau\Delta\mathbf{z}^{n+1/2}-\frac{\tau\mathrm{Gr}}{|\mathbf{g}|}\mathbf{g}T^{n+1}-\tau L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n})\mathbf{z}^{n+1/2}-\tau L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{z}^{n})\mathbf{u}=$$
$$=-\left(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right)+\tau\Delta_h\mathbf{z}^{n+1/2}-\frac{\tau\mathrm{Gr}}{|\mathbf{g}|}\mathbf{g}T^{n+1}-\tau L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{n})\mathbf{z}^{n+1/2}+$$
$$+\tau L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n})\mathbf{u}-\tau L_{h,\mathbf{u}}(\mathbf{z}^{n+1/2})\mathbf{u},$$

и оценим таким образом:

$$\tau\|\mathrm{grad}_h\pi^{n}\|\leqslant\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|+\tau\left\|\Delta_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|+\frac{\tau\mathrm{Gr}}{\sqrt{\delta_0}}\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|+\tau c_0\|\nabla_h\mathbf{u}^{n}\|_{L_2(D_n)}\times$$
$$\times\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|+\tau c_0\|\nabla_h\mathbf{u}\|\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|+\tau c_0\|\nabla_h\mathbf{u}\|\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|=$$
$$=(1+\tau c_0\|\nabla_h\mathbf{u}\|)\left\|\mathbf{z}^{n+1/2}-\mathbf{z}^{n}\right\|+\tau c_0\left(\frac{1}{h}+\|\mathbf{u}^{n}\|_{L_2(D_n)}+\|\nabla_h\mathbf{u}\|\right)\times$$
$$\times\left\|\nabla_h\mathbf{z}^{n+1/2}\right\|+\frac{\tau\mathrm{Gr}}{\sqrt{\delta_0}}\left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|.$$

Возведем обе части в квадрат и имеем

$$\tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^n\right\| \leqslant M \left(\left\|\mathbf{z}^{n+1/2} - \mathbf{z}^n\right\|^2 + \tau \left\|\nabla_h \mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2 + \tau \left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2 \right), \qquad (24)$$

где

$$M = (1 + \tau c_0 \|\nabla_h \mathbf{u}\|)^2 + \tau c_0^2 \left(\frac{1}{h} + \|\mathbf{u}^n\|_{L_2(D_n)} + \|\nabla_h \mathbf{u}\| \right)^2 + \frac{\mathrm{Gr}^2}{\delta_0}.$$

Неравенство (24) умножаем на α и прибавим к (23):

$$\begin{gathered}
\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + \left(1 - \frac{\tau\, c_1 \|\nabla_h \mathbf{u}\|}{2\varepsilon_3 h^2} - \alpha M \right) \left\|\mathbf{z}^{n+1/2} - \mathbf{z}^n\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^{n+1}\right\|^2 + \\
+ \tau [A - 2c_1 \|\nabla_h \mathbf{u}\| \, (1 + \varepsilon_3) - \alpha M] \left\|\nabla_h \mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2 \leqslant \\
\leqslant \|\mathbf{z}^n\|^2 + \tau^2 \, (1 - \alpha) \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^n\right\|^2 + \tau \, (B + \alpha M) \left\|\nabla_h T^{n+1}\right\|^2. \qquad (25)
\end{gathered}$$

Соотношение (22) умножим на $G = \dfrac{\mathrm{Pr}\,(B + \alpha M)}{2\varepsilon_6}$ и сложим с (25), тогда имеем

$$\begin{gathered}
\left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + \left(1 - \frac{\tau c_1 \|\nabla_h \mathbf{u}\|}{2\varepsilon_3 h^2} - \alpha M - G \frac{\tau c_0 \|\nabla_h \theta\|}{2\varepsilon_4 h^2} \right) \left\|\mathbf{z}^{n+1/2} - \mathbf{z}^n\right\|^2 + \tau \Big[A - 2c_1 \, (1 + \varepsilon_3) \times \\
\times \|\nabla_h \mathbf{u}\| - \alpha M - G \frac{c_0 \|\nabla_h \theta\|}{2\varepsilon_5} \Big] \left\|\nabla_h \mathbf{z}^{n+1/2}\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^{n+1}\right\|^2 + \\
+ G \left\|T^{n+1}\right\|^2 + \frac{2G\tau}{\mathrm{Pr}} \left(1 - \varepsilon_6 - c_0 \,\mathrm{Pr}\, (\varepsilon_4 + \varepsilon_5) \, \|\nabla_h \theta\|\right) \left\|\nabla_h \theta^{n+1}\right\|^2 \leqslant \\
\leqslant \|\mathbf{z}^n\|^2 + G \|T^n\|^2 + \tau^2 (1 - \alpha) \|\mathrm{grad}_h \pi^n\|^2. \qquad (26)
\end{gathered}$$

Пусть параметры сетки и входные данные задачи удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}
1 - \frac{\tau\, c_1 \|\nabla_h \mathbf{u}\|}{2\varepsilon_3 h^2} - \alpha M - G \frac{\tau c_0 \|\nabla_h \theta\|}{2\varepsilon_4 h^2} \geqslant 0, \\
A - 2c_1 \, (1 + \varepsilon_3) \, \|\nabla_h \mathbf{u}\| - \alpha M - G \frac{c_0 \|\nabla_h \theta\|}{2\varepsilon_5} \geqslant \alpha_0 > 0, \qquad (27) \\
\frac{2G\tau}{\mathrm{Pr}} \left(1 - \varepsilon_6 - c_0 \,\mathrm{Pr}\, (\varepsilon_4 + \varepsilon_5) \, \|\nabla_h \theta\|\right) \geqslant G\beta_0 > 0.
\end{gathered}$$

Тогда из соотношения (23) имеем

$$\begin{gathered}
(1 + \tau\alpha_0) \left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + G \, (1 + \tau\beta_0) \left\|T^{n+1}\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^{n+1}\right\|^2 \leqslant \\
\leqslant \|\mathbf{z}^n\|^2 + \tau \, (1 - \alpha) \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^n\right\|^2 + G \|T^n\|^2, \\
(1 + \tau\alpha_0) \left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + G \, (1 + \tau\beta_0) \left\|\pi^{n+1}\right\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^{n+1}\right\|^2 \leqslant (1 + \tau\alpha_0)^{-1} \, (1 + \tau\alpha_0) \times \\
\times \left\|\mathbf{z}^{n+1}\right\|^2 + G \, (1 + \tau\beta_0) \frac{\left\|T^{n+1}\right\|^2}{1 + \tau\beta_0} + \tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^{n+1}\right\|^2 \leqslant \\
\leqslant q \Big[(1 + \tau\alpha_0) \, \|\mathbf{z}^n\|^2 + G \, (1 + \tau\beta_0) \, \|T^n\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^n\right\|^2 \Big],
\end{gathered}$$

где $q = \max \left\{ \dfrac{1}{1 + \tau\alpha_0}, 1 - \alpha, \dfrac{1}{1 + \tau\beta_0} \right\} < 1.$

То есть для величины

$$F^n = (1 + \tau\alpha_0) \|\mathbf{z}^n\|^2 + G (1 + \tau\beta_0) \|T^n\|^2 + \tau^2 \left\|\overline{\mathrm{grad}}_h \pi^n\right\|^2$$

имеет место оценка

$$F^{n+1} < qF^n.$$

Следует отметить, что условия (27), обеспечивающие сходимость итераций, совпадают по порядку с условиями, гарантирующими существование и единственность решения исходной задачи (1)–(4).

Список литературы

[1] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.

[2] Бейсебай П.Б., Данаев Н.Т. О численном решении свободной конвекции при подогреве сбоку // Вестник КазНУ. Серия матем., мех., информ. 2007. № 1(52). С. 71–80.

[3] Бейсебай П.Б., Данаев Н.Т. Об одном исследовании разностной схемы для уравнений тепловой конвекции // Матер. междунар. конф. “Информационно-коммуникационные технологии как основной фактор развития инновационного общества”. Усть-Каменогорск, 2007. Ч. 2. С. 6–12.

[4] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

Поступила в редакцию 5 сентября 2007 г.