

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА СОРЕ\*

М. В. ЕФИМОВА

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,*

*Красноярск, Россия*

e-mail: andr@icm.krasn.ru

Stability of an interface between two binary mixes is investigated for the case of arbitrary perturbations. The dependence of the complex decrement versus the wave number is obtained numerically. Physical parameters of glycerin and ethyl spirit were used in calculations. It is shown that when the Marangony number increases, the region of instability turns toward the short wavelengths for the nondeformable surfaces. For the deformable surface a long-wave instability is observed when the Marangoni number is increased.

## 1. Основные предположения и уравнения

Рассмотрим совместное движение двух жидких сред, контактирующих по некоторой плоской поверхности  $y = 0$ . Обозначим через  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) области, занятые жидкостями, через  $\rho_j, \nu_j, \chi_j, c_{pj}$  — соответственно плотности, кинематические вязкости, коэффициенты температуропроводности, удельной теплоемкости жидкостей. Далее предполагаем, что эти параметры — положительные постоянные. Плоскости  $y = \pm l$  суть непроницаемые твердые стенки. Считается, что данная конфигурация находится в покое:  $\vec{u}_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ . Предполагается, что в каждой из жидкостей имеется растворенное вещество концентрации  $c_j$ ; зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации линейная:

$$\sigma(\theta, c) = \sigma^0 - \gamma(c - c^0) - \sigma_T(\theta - \theta^0), \quad (1.1)$$

где  $\sigma_0 > 0$ ,  $\sigma_T > 0$ ,  $\gamma < 0$  — постоянные, а  $c_0$ ,  $\theta_0$  — концентрации и температуры в некоторой точке поверхности раздела.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00836), гранта НШ 5873.2006.1 и комплексного интеграционного проекта № 2.15 СО РАН.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2007.

Тогда движение жидкостей описывается системой уравнений при  $\mathbf{x} \in \Omega_j$ :

$$\mathbf{u}_{jt} + \mathbf{u}_j \nabla \mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j = \nu_j \Delta \mathbf{u}_j; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0; \quad (1.3)$$

$$\theta_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \theta_j = \chi_j \Delta \theta_j; \quad (1.4)$$

$$c_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla c_j = d_j \Delta \left( c_j + \frac{k_\theta^j}{\theta_c} \theta_j \right), \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$  — вектор скорости,  $p_j$  — отклонение давления от гидростатического,  $\theta_j$  — температура,  $c_j$  — концентрация,  $\theta_c$  — средняя температура слоев, внешние силы отсутствуют. Сформулируем, следуя [1, 2] (в [1] рассмотрен лишь случай стационарного течения и  $c = 0$ ), условия на поверхности раздела жидкостей  $\Gamma$ :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2; \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_n; \quad (1.7)$$

$$\theta_1 = \theta_2, \quad c_1 = \alpha c_2; \quad (1.8)$$

$$(P_2 - P_1)\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_{11}\sigma; \quad (1.9)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = 0; \quad (1.10)$$

$$\rho_2 d_2 \left( \frac{\partial c_2}{\partial n} + \frac{k_\theta^2}{\theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) = \rho_1 d_1 \left( \frac{\partial c_1}{\partial n} + \frac{k_\theta^1}{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right). \quad (1.11)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к  $\Gamma$ , направленный из  $\Omega_1$  в  $\Omega_2$ ;  $V_n$  — скорость перемещения поверхности раздела  $\Gamma$  в направлении  $\mathbf{n}$ ;  $P_j = (-p_j - \rho_j \mathbf{g} \cdot \mathbf{x})E + 2\rho_j \nu_j D_j$  — тензоры напряжений;  $E$  — единичный тензор;  $H$  — средняя кривизна поверхности  $\Gamma$  ( $H > 0$ , если  $\Gamma$  выпукла наружу области  $\Omega_1$ );  $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$  — поверхностный градиент;  $\lambda_j = \chi_j \rho_j c_{p_j}$  — коэффициенты теплопроводности. Через  $\mathbf{u}$  и  $\theta$  обозначены значения вектора скорости и температур обеих жидкостей на  $\Gamma$ , попарно совпадающие в силу (1.6), (1.8), во втором равенстве (1.8)  $\alpha$  есть постоянная равновесия Генри.

Области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  могут контактировать не только друг с другом, но и с твердыми телами. Поверхности твердых тел, контактирующих с жидкостями, обозначим через  $\Sigma_i$ . На каждой из них ставится условие прилипания

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \cap \Sigma_i, \quad (1.12)$$

где  $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t)$  — скорость движения стенки  $\Sigma_i$ . Кроме того, будем считать, что температура в точках  $\Sigma_i$  удовлетворяет одному из условий

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial n} = h_i(\mathbf{x}, t), \quad \theta_i = b_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \cap \Sigma_i, \quad (1.13)$$

с заданными функциями  $h_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $b_i(\mathbf{x}, t)$ .

Если через твердые поверхности  $\Sigma_i$  нет потока вещества, то

$$\frac{\partial c_i}{\partial n} + \frac{k_\theta^i}{\theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_i. \quad (1.14)$$

Соотношения (1.2)–(1.11) следует дополнить начальными условиями

$$\Omega_i = \Omega_i^0; \quad (1.15)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0; \quad (1.16)$$

$$\theta_i(\mathbf{x}, 0) = \theta_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0; \quad (1.17)$$

$$c_i(\mathbf{x}, 0) = c_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0. \quad (1.18)$$

Если поверхность  $\Sigma_i$  не имеет общих точек с  $\Gamma$ , то постановка нестационарной задачи о термокапиллярном движении закончена. Сформулируем эту задачу. Требуется найти области  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) и функции  $\bar{u}_i, p_i, \theta_i, c_i$ , определенные в областях  $\Omega_i$  так, чтобы выполнялись уравнения (1.2)–(1.4), граничные условия (1.5)–(1.14) и начальные условия (1.15)–(1.18).

Заметим, что в [3] доказана разрешимость плоской стационарной задачи о чисто термокапиллярном течении одной жидкости. В работе [4] доказана глобальная разрешимость одномерной нестационарной задачи с двумя коэффициентами вязкости, правда, без термокапиллярного эффекта. В [5] изучена линейная устойчивость поверхности при наличии диффузионного переноса между двумя несмешивающимися вязкими жидкостями.

В данной работе рассматриваются два несмешивающихся несжимаемых плоских слоя смесей с общей поверхностью раздела  $y = 0$ . Плоскости  $y = \pm l$  суть непроницаемые твердые стенки. Считается, что данная конфигурация находится в покое:  $\mathbf{u}_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ . При указанных выше условиях задача о термодиффузионном равновесии с поверхностью раздела [6], как можно видеть, имеет решение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j = 0, \quad p_j = \text{const}, \quad \theta_1 &= \frac{\theta_{10} - \theta_{20}}{(\lambda + 1)l} y + \frac{\theta_{20} + \lambda\theta_{10}}{\lambda + 1}, \\ \theta_2 &= \frac{\lambda(\theta_{10} - \theta_{20})}{(\lambda + 1)l} y + \frac{\theta_{20} + \lambda\theta_{10}}{\lambda + 1}, \\ c_1 &= -\frac{k_1(\theta_{10} - \theta_{20})}{(\lambda + 1)l} y + c_0, \quad c_2 = -\frac{k_2\lambda(\theta_{10} - \theta_{20})}{(\lambda + 1)l} y + c_0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В (1.19)  $\theta_{10}, \theta_{20}$  — температуры твердых стенок при  $y = \pm l$  соответственно;  $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$  — отношение коэффициентов теплопроводностей;  $k_j = k_\theta^j/\theta_c$ ,  $k_\theta^j$  — коэффициенты термодиффузии;  $c_0$  — концентрация на границе раздела (все эти величины предполагаются постоянными).

**Замечание 1.** ПАВ на поверхности  $y = 0$  отсутствует, а в законе Генри  $c_1 = \alpha c_2$  постоянная  $\alpha$  полагается, без ограничения общности, равной единице.

## 2. Задача о малых возмущениях

Для изучения устойчивости равновесного состояния двух слоев жидкостей (1.19) воспользуемся уравнениями малых возмущений, полученных в общем виде в [6].

Сформулируем задачу об устойчивости равновесного состояния двух слоев жидкости относительно малых возмущений. Запишем линеаризованную задачу для возмущения скорости, давления, температуры и концентрации в каждой из жидкостей:

$$U_{j\tau} + \frac{\nu_j}{\nu_2} \nabla P_j = \frac{\nu_j}{\nu_2} \Delta \mathbf{U}_j; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U}_j = 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\nu_j}{\chi_j} T_{j\tau} + V_j \varepsilon_j = \Delta T_j; \quad (2.3)$$

$$K_{j\tau} - \frac{\nu_j}{\nu_2} V_j \varepsilon_j = \frac{d_j}{\nu_2} \Delta (K_j + \operatorname{Pr}_j T_j). \quad (2.4)$$

Граничные условия на поверхности раздела  $\eta = 0$  сводятся в этом случае к следующим (влиянием поверхностной вязкости пренебрегаем, так как она обычно очень мала):

$$U_2 = \nu U_1, \quad V_2 = \nu V_1, \quad K_2 + \frac{\partial c_2}{\partial \eta} R = k_\theta \left( K_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \eta} R \right); \quad (2.5)$$

$$T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} R = \frac{\nu}{\chi} \left( T_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} R \right), \quad \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = \frac{\lambda \nu}{\chi} \frac{\partial T_1}{\partial \eta}; \quad (2.6)$$

$$\rho \nu^2 P_1 - P_2 + 2V_{2\eta} - 2\rho \nu^2 V_{1\eta} = \operatorname{We} R_{\xi\xi}; \quad (2.7)$$

$$U_{2\eta} + V_{2\xi} - \rho \nu^2 (U_{1\eta} + V_{1\xi}) = -M \left( T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} R \right)_\xi - \operatorname{Sr} \left( C_2 + \frac{\partial c_2}{\partial \eta} R \right)_\xi; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \eta} + \operatorname{Pr}_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = \rho d k_\theta \left( \frac{\partial K_1}{\partial \eta} + \operatorname{Pr}_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right); \quad (2.9)$$

$$R_\tau = V_1. \quad (2.10)$$

Граничные условия на твердых стенках:

$$U_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \eta} + \operatorname{Pr}_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 1, \quad (2.11)$$

$$U_2 = 0, \quad T_2 = 0, \quad V_2 = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \eta} + \operatorname{Pr}_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = -1. \quad (2.12)$$

Соотношения (2.1)–(2.12) приведены в безразмерной форме. Используются следующие единицы измерения расстояния, времени, скорости, давления, температуры и концентрации соответственно:

$$l, \quad \frac{l^2}{\nu_2}, \quad \frac{\nu_j}{l}, \quad \frac{\rho_j \nu_j^2}{l^2}, \quad \frac{(\theta_{10} - \theta_{20}) \nu_j}{\chi_j}, \quad \frac{k_\theta^j (\theta_{10} - \theta_{20})}{\theta_c}, \quad j = 1, 2,$$

введены обозначения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\lambda + 1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad k_\theta = \frac{k_\theta^1}{k_\theta^2}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2};$$

$$S_j = \frac{\nu_j}{d_j} \text{ — число Шмидта,} \quad \operatorname{Pr}_j = \frac{\nu_j}{\chi_j} \text{ — число Прандтля;}$$

$$\operatorname{We} = \frac{\sigma_0 l}{\rho_2 \nu_2^2} \text{ — число Вебера,}$$

$$M = \frac{\sigma_T (\theta_{10} - \theta_{20}) l}{\rho_2 \nu_2 \chi_2} \text{ — число Марангони,}$$

$$\operatorname{Sr} = \frac{\gamma k_\theta^2 l (\theta_{10} - \theta_{20})}{\rho_2 \nu_2^2 \theta_c} \text{ — число Соре.}$$

Решение краевой задачи (2.1)–(2.12) ищем в виде нормальных волн

$$(U, V, P, T, K, R) = (U(\eta), V(\eta), P(\eta), T(\eta), K(\eta), R) \exp(i\alpha\xi - iC\tau), \quad (2.13)$$

где  $\alpha$  — волновое число,  $C$  — комплексный декремент. Подставляя (2.13) в (2.1)–(2.4), получим спектральную задачу относительно параметра  $C$  для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$U_j'' + \left( \frac{\nu_2}{\nu_j} iC - \alpha^2 \right) U_j - P_j i\alpha = 0; \quad (2.14)$$

$$V_j'' + \left( \frac{\nu_2}{\nu_j} iC - \alpha^2 \right) V_j - P_j' = 0; \quad (2.15)$$

$$i\alpha U_j + V_j' = 0; \quad (2.16)$$

$$T_j'' + \left( \frac{\nu_2}{\chi_j} iC - \alpha^2 \right) T_j - \varepsilon_j V_j = 0; \quad (2.17)$$

$$K_j'' + \left( \frac{\nu_2}{d_j} iC - \alpha^2 \right) K_j + \text{Pr}_j (T_j'' - \alpha^2 T_j) + \frac{\nu_2}{d_j} V_j \varepsilon_j = 0. \quad (2.18)$$

Граничные условия на твердых стенках:

$$U_j = 0, \quad V_j = 0, \quad T_j = 0, \quad \frac{\partial K_j}{\partial \eta} + \text{Pr}_j \frac{\partial T_j}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = \pm 1. \quad (2.19)$$

Условия на поверхности раздела  $\eta = 0$ :

$$U_2 = \nu U_1, \quad V_2 = \nu V_1, \quad K_2 - \varepsilon_2 R = k_\theta (K_1 - \varepsilon_1 R); \quad (2.20)$$

$$T_2 + \varepsilon_2 R = \frac{\nu}{\chi} (T_1 + \varepsilon_1 R), \quad \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = \frac{\lambda \nu}{\chi} \frac{\partial T_1}{\partial \eta}; \quad (2.21)$$

$$\rho \nu^2 P_1 - P_2 + 2V_{2\eta} - 2\rho \nu^2 V_{1\eta} = -\alpha^2 \text{We} R; \quad (2.22)$$

$$U_{2\eta} + i\alpha V_2 - \rho \nu^2 (U_{1\eta} + i\alpha V_1) = -M i \alpha (T_2 + \varepsilon_2 R) - i\alpha \text{Sr} (K_2 - \varepsilon_2 R); \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \eta} + \text{Pr}_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = \rho d k_\theta \left( \frac{\partial K_1}{\partial \eta} + \text{Pr}_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right); \quad (2.24)$$

$$R = \frac{iV_2}{C}. \quad (2.25)$$

Для неустойчивости в первом приближении состояния равновесия (1.19) необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одного собственного значения было выполнено условие  $\text{Im}C > 0$ .

Рассмотрим асимптотическое поведение амплитудных уравнений при  $\alpha \rightarrow 0$ . Положим

$$\begin{aligned} U_j &= U_j^0 + \alpha U_j^1 + \dots, & V_j &= \alpha V_j^0 + \alpha^2 V_j^1 + \dots, & P_j &= \alpha P_j^0 + \alpha^2 P_j^1 + \dots, \\ T_j &= T_j^0 + \alpha T_j^1 + \dots, & K_j &= K_j^0 + \alpha K_j^1 + \dots, & C &= C^0 + \alpha C^1 + \dots, \\ R &= \alpha R_j^0 + \alpha^2 R_j^1 + \dots \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в спектральную задачу (2.14)–(2.25) в нулевом приближении приводит к системе

$$U_j^{0''} + \frac{\nu_2}{\nu_j} iC^0 U_j^0 = 0; \quad (2.26)$$

$$V_j^{0''} + \frac{\nu_2}{\nu_j} iC^0 V_j^0 - P_j^{0'} = 0; \quad (2.27)$$

$$iU_j^0 + V_j^{0'} = 0; \quad (2.28)$$

$$T_j^{0''} + \frac{\nu_2}{\chi_j} iC^0 T_j^0 = 0; \quad (2.29)$$

$$K_j^{0''} + \frac{\nu_2}{d_j} iC^0 K_j^0 + \text{Pr}_j T_j^{0''} = 0. \quad (2.30)$$

С граничными условиями на твердых стенках:

$$U_j^0 = 0, \quad V_j^0 = 0, \quad T_j^0 = 0, \quad \frac{\partial K_j^0}{\partial \eta} + \text{Pr}_j \frac{\partial T_j^0}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = \pm 1. \quad (2.31)$$

Условия на поверхности раздела  $\eta = 0$ :

$$U_2^0 = \nu U_1^0, \quad V_2^0 = \nu V_1^0, \quad K_2^0 = k_\theta K_1^0; \quad (2.32)$$

$$T_2^0 = \frac{\nu}{\chi} T_1^0, \quad \frac{\partial T_2^0}{\partial \eta} = \frac{\lambda \nu}{\chi} \frac{\partial T_1^0}{\partial \eta}; \quad (2.33)$$

$$\rho \nu^2 P_1^0 - P_2^0 + 2V_{2\eta}^0 - 2\rho \nu^2 V_{1\eta}^0 = -\alpha^2 \text{We} R^0; \quad (2.34)$$

$$U_2^{0'} - \rho \nu^2 U_1^{0'} = 0; \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial K_2^0}{\partial \eta} + \text{Pr}_2 \frac{\partial T_2^0}{\partial \eta} = \rho dk_\theta \left( \frac{\partial K_1^0}{\partial \eta} + \text{Pr}_1 \frac{\partial T_1^0}{\partial \eta} \right); \quad (2.36)$$

$$R^0 = \frac{iV_2^0}{C^0}. \quad (2.37)$$

Далее рассмотрим уравнения (2.26). Их решения имеют следующий вид:

$$U_1^0 = A_1 \sin \left( \sqrt{\frac{1}{\nu} iC_0 \eta} \right) + A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{1}{\nu} iC_0 \eta} \right), \quad U_2^0 = A_3 \sin(\sqrt{iC_0 \eta}) + A_4 \cos(\sqrt{iC_0 \eta}), \quad (2.38)$$

где константы  $A_1, A_2, A_3, A_4$  находятся из граничных условий (2.31), (2.32), (2.35). В результате получаем систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных  $A_1 - A_4$ . Поскольку ищутся ненулевые решения  $U_j$ , то определитель, составленный из коэффициентов при  $A_1 - A_4$ , должен равняться нулю. В результате получим уравнение для нахождения декремента  $C_0$ :

$$\sin \left( \sqrt{\frac{1}{\nu} iC_0} \right) \cos(\sqrt{iC_0}) + \rho \sqrt{\nu} \cos \left( \sqrt{\frac{1}{\nu} iC_0} \right) \sin(\sqrt{iC_0}) = 0. \quad (2.39)$$

Если обозначить  $\sqrt{iC_0} = \mu$ , то корни уравнения (2.39)  $\mu$  вещественны и их счетное число. Значит  $C_0$  — число мнимое,  $C_0 = iC_{0i}$ , причем  $C_{0i} < 0$ . Поэтому длинноволновые возмущения затухают монотонно. Уравнение для определения первой поправки к комплексному декременту громоздко и в данной статье не приводится. Для системы глицерин—этиловый спирт ( $\rho = 1.208 \cdot 10^{-6}$ ,  $\nu = 0.432$ ) имеем  $\mu_1 = 1.571$ ,  $\mu_2 = 2.06$ ,  $\mu_3 = 4.13$ .

### 3. Численное решение задачи на собственные значения

Для отыскания численного решения методом ортогонализации [7] приведем систему (2.14)–(2.25) к виду  $\mathbf{w}' = A\mathbf{w}$ , где  $\mathbf{w}(\zeta)$  — вектор неизвестных;  $A(\zeta)$  — матрица коэффициентов. Для этого сделаем замену для слоя  $\Omega_1 = \{0 \leq \eta \leq 1\}$ :

$$\zeta = 1 - \eta, \quad U_1 = y_1, \quad U'_1 = -y_2, \quad V_1 = y_3, \quad P_1 = y_4, \quad (3.1)$$

$$T_1 = y_5, \quad T'_1 = -y_6, \quad K_1 = y_7, \quad K'_1 = -y_8; \quad (3.2)$$

для слоя  $\Omega_2 = \{-1 \leq \eta \leq 0\}$ :

$$\zeta = \eta + 1, \quad U_2 = z_1, \quad U'_2 = z_2, \quad V_2 = z_3, \quad P_2 = z_4, \quad (3.3)$$

$$T_2 = z_5, \quad T'_2 = z_6, \quad K_2 = z_7, \quad K'_2 = z_8. \quad (3.4)$$

Исключая  $V', V''$  из (2.15), (2.16), получим следующую систему уравнений:

1) для слоя  $\Omega_1 = \{0 \leq \zeta \leq 1\}$ :

$$\begin{aligned} y'_1 &= -y_2, \\ y'_2 &= y_1(\alpha^2 - \frac{1}{\nu}iC) + i\alpha y_4, \\ y'_3 &= i\alpha y_1, \\ y'_4 &= i\alpha y_2 + (\frac{1}{\nu}iC + \alpha^2)y_3, \\ y'_5 &= -y_6, \\ y'_6 &= (\alpha^2 - \frac{\nu_2}{\chi_1}iC)y_5 + \varepsilon_1 y_3, \\ y'_7 &= -y_8, \\ y'_8 &= (\alpha^2 - \frac{\nu_2}{d_1}iC)y_7 - \frac{\nu_1}{d_1}\varepsilon_1 y_3 - \text{Pr}_1(\varepsilon_1 y_3 - \frac{\nu_2}{\chi_1}iC y_5). \end{aligned} \quad (3.5)$$

С граничными условиями на твердой стенке при  $\zeta = 0$ :

$$y_1 = y_3 = y_5 = 0, \quad y_8 + \text{Pr}_1 y_6 = 0;$$

2) для слоя  $\Omega_2 = \{0 \leq \zeta \leq 1\}$ :

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_2, \\ z'_2 &= z_1(\alpha^2 - iC) + i\alpha z_4, \\ z'_3 &= -i\alpha z_1, \\ z'_4 &= -i\alpha z_2 + (iC - \alpha^2)z_3, \\ z'_5 &= z_6, \\ z'_6 &= (\alpha^2 - \text{Pr}_2 iC)z_5 + \varepsilon_2 z_3, \\ z'_7 &= z_8, \\ z'_8 &= \left( \alpha^2 - \frac{\nu_2}{d_2}iC \right) z_7 - \frac{\nu_2}{d_2}\varepsilon_2 z_3 - \text{Pr}_1(\varepsilon_2 z_3 - \text{Pr}_2 iC z_5). \end{aligned} \quad (3.6)$$

С граничными условиями на твердой стенке при  $\zeta = 0$ :

$$z_1 = z_3 = z_5 = 0, \quad z_8 + \text{Pr}_2 z_6 = 0.$$

Граничные условия на поверхности раздела  $\zeta = 1$  в силу замены можно представить в следующем виде (для недеформируемой поверхности раздела):

$$\begin{aligned} z_1 - \nu y_1 &= 0, \\ z_3 - y_3 &= 0, \\ z_2 + \rho \nu^2 y_2 + Mi \alpha \frac{\nu}{\chi} y_5 + Sri \alpha k_\theta y_7 &= 0, \\ z_8 - \left( Pr_2 \frac{\lambda \nu}{\chi} - \rho dk_\theta Pr_1 \right) y_6 + \rho dk_\theta y_8 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если поверхность раздела деформируема, то граничные условия (2.20)–(2.25) примут вид

$$\begin{aligned} z_3 - \nu y_3 &= 0, \\ \rho \nu^2 y_4 - z_4 - 2i \alpha \nu y_1 - 2\rho \nu^2 i \alpha y_1 + \alpha^2 We \frac{i \nu}{C} y_3 &= 0, \\ z_2 + \rho \nu^2 y_2 + i \alpha z_3 - \rho \nu^2 i \alpha y_3 + Mi \alpha \left( \frac{\nu}{\chi} y_5 + \frac{\nu^2 \varepsilon_1 i}{\chi Pr_1 C} y_3 \right) + \\ + Sri \alpha \left( k_\theta y_7 - \frac{\nu k_\theta \varepsilon_1 i}{C} y_3 \right) &= 0, \\ z_8 - \left( Pr_2 \frac{\lambda \nu}{\chi} - \rho dk_\theta Pr_1 \right) y_6 + \rho dk_\theta y_8 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, решается система вида  $\mathbf{w}' = A^j(\zeta) \mathbf{w}$ , где  $j = 1$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{y}$  в слое  $\Omega_1$  и  $j = 2$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{z}$  в слое  $\Omega_2$ , с краевыми условиями  $B_1 \mathbf{y}(0) = 0$ ,  $B_2 \mathbf{z}(0) = 0$  на твердых стенках и  $D \mathbf{w}(1) = 0$  — на границе раздела.

Для нахождения собственного значения  $C$  необходимы два начальных приближения  $C_0, C_1$ . Начальное приближение  $C_0$  выбирается из условия (2.39).

## 4. Анализ результатов

Задача решалась для системы глицерин (80%)–60%-й раствор этилового спирта, а также глицерин (80%)–90%-й раствор метилового спирта. Пусть поверхность раздела недеформируема ( $We = \infty$ ). Проведенные расчеты показали, что неустойчивость

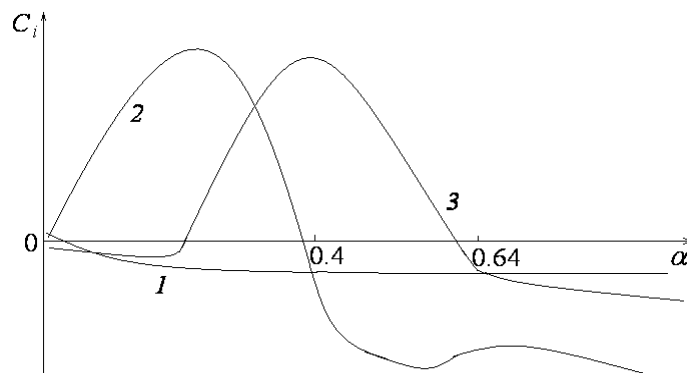


Рис. 1. Зависимость  $C_i$  от волнового числа  $\alpha$  в системе глицерин–этиловый спирт при  $Sr = -10$ : кривая 1 —  $M = 1.7 \cdot 10^6$ , 2 —  $M = 2.3 \cdot 10^6$ , 3 —  $M = 10^7$



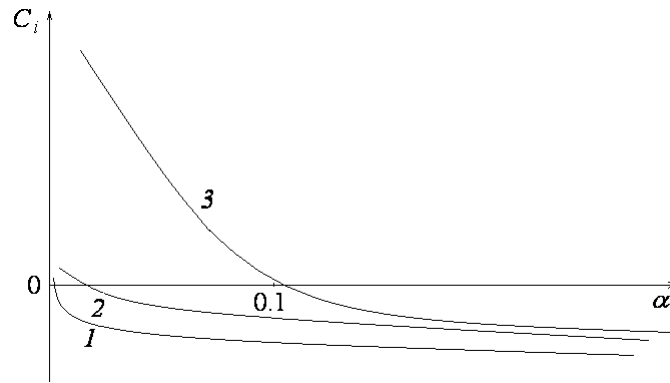


Рис. 2. Зависимость  $C_i$  от волнового числа  $\alpha$  в системе глицерин—этиловый спирт при фиксированном  $M$ : кривая 1 —  $Sr = -1$ , 2 —  $Sr = -10$ , 3 —  $Sr = -100$

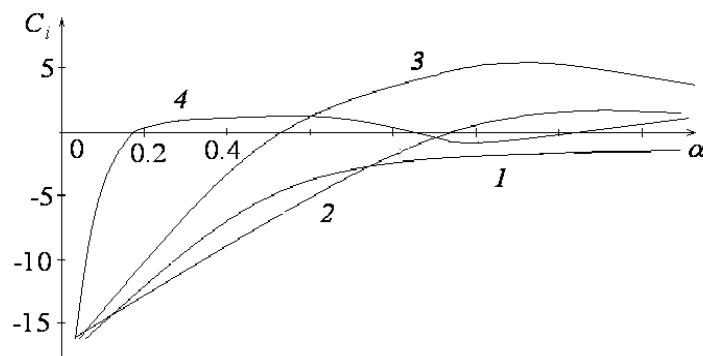


Рис. 3. Зависимость  $C_i$  от волнового числа  $\alpha$  в системе глицерин—метиловый спирт при  $Sr = -10$ : кривая 1 —  $M = 200$ , 2 —  $M = 7500$ , 3 —  $M = 9500$ , 4 —  $M = 19500$

наблюдается в области длинных волн. На рис. 1 показаны результаты расчетов зависимости  $C_i$  от  $\alpha$  при различных числах Марангони. При этом при увеличении числа Марангони область неустойчивости смещается в сторону умеренных волн.

На рис. 2 показано влияние эффекта Соре на устойчивость длинноволновых возмущений, т. е. при росте числа Соре область неустойчивости уменьшается.

Если же поверхность раздела деформируема, то при увеличении числа Марангони область неустойчивости смещается из области умеренных волн к области длинных волн (рис. 3).

Автор благодарит В.К. Андреева за постановку задачи. По данной работе был сделан доклад на VII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию.

## Список литературы

- [1] NAPOLITANO L.G. Plane Marangoni-Poiseuille flow two immiscible fluids // Acta Astronautica. 1980. Vol. 7, N 4, 5. P. 461–478.
- [2] ПУХНАЧЕВ В.В. Движение вязкой жидкости со свободными границами: учебн. пособие. Новосибирск: НГУ, 1989.

- [3] ЛАГУНОВА М.В. О разрешимости плоской задачи термокапиллярной конвекции // Проблемы математического анализа. Вып. 10. Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. С. 33–47.
- [4] SHELUKHIN V. Joint motion of viscous and semi-viscous flows // Intern. Workshop “Free Boundaries in Viscous Flows”. St. Peterburg. 1996. Abstracts. P. 17.
- [5] ХЕННЕНБЕРГ М., Биш П.М., Винь-Адлер М., Занфельд А. Неустойчивость поверхности раздела и продольные волны в системе жидкость—жидкость // Гидродинамика межфазных поверхностей. 1984. С. 19–44.
- [6] АНДРЕЕВ В.К. Линеаризованная задача о малых возмущениях движения жидкости с поверхностью раздела при наличии эффектов Соре // Математическое моделирование в механике: сборник трудов семинара. Деп. ВИНТИ № 1999-В99. С. 12–33.
- [7] ГОДУНОВ С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, вып. 3. С. 171–173.

*Поступила в редакцию 21 марта 2007 г.*