

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ХАРАКТЕР КОЛЕБАНИЙ НАСЛЕДСТВЕННО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Ф. Б. БАДАЛОВ, А. АБДУКАРИМОВ

Ташкентский государственный авиационный институт, Узбекистан

Б. А. ХУДАЯРОВ

Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Узбекистан

e-mail: bakht-flpo@yandex.ru

It is shown that the differential dependence between stresses and deformations arising in studies of dynamical problems of a deformable rigid body leads to a certain inaccuracy, especially at the initial moment of time. Numerical results obtained for dynamical problems of hereditary-deformable systems are compared for the cases of exponential and weakly-singular heredity kernels.

Введение

Широкое применение композиционных материалов в авиационной промышленности и других отраслях машиностроения привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования тонкостенных конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. В связи с этим наследственная теория вязкоупругости привлекает к себе все большее внимание исследователей. Об этом свидетельствует выход в свет за последние годы ряда научных работ, в которых отражены новейшие достижения теории вязкоупругости. Однако несмотря на исследования в этой области до настоящего времени не было научных работ, где достаточно полно анализировались бы первоначальные зависимости между напряжением и деформацией для вязкоупругого тела. В настоящей работе показано, что такие зависимости даже в самом общем случае эквивалентны интегральным зависимостям с регулярными ядрами наследственности, которые приводят к некоторым неточным результатам. По данному закону, скорость деформации ползучести и релаксации напряжений, пропорциональные ядру релаксации ($R(t)$) и ползучести ($K(t)$), в начальный момент времени имеют конечные значения. Многочисленные исследования [1–4] показывают, что $R(0) = K(0) = \infty$. Исследованию этих влияний на решение линейных и некоторых нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем и посвящена настоящая работа.

1. Дифференциальные зависимости между напряжением и деформацией и их основные недостатки

Как известно [5–7], первоначальные зависимости между напряжением и деформацией для вязкоупругого тела были установлены в дифференциальной форме. Эти зависимости в самом общем случае эквивалентны интегральным зависимостям с регулярными ядрами наследственности, т. е.

$$E\varepsilon(t) = \left[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \right], \quad (1)$$

где E — модуль упругости,

$$K(t-\tau) = \sum_{i=1}^N C_i e^{-\beta_i(t-\tau)} \quad (2)$$

называется ядром ползучести, или ядром наследственности.

При $N = 1$ (в первом приближении) из (2) получим ядра наследственности, соответствующие модели Кельвина; в современной литературе часто употребляют модель стандартного вязкоупругого тела:

$$A_0\varepsilon(t) + A_1\dot{\varepsilon}(t) = B_0\sigma(t) + B_1\dot{\sigma}(t). \quad (3)$$

Из (3) при $A_0 = 0$ получим модель Максвелла, а при $B_1 = 0$ — модель Фойгта. Модель стандартного вязкоупругого тела качественно объясняет наблюдаемые опытные данные и привлекательна своей простотой и наглядностью; в 40-е годы XX века был выполнен ряд исследований, относящихся к частным задачам для такой модели [5, 7, 8], и в настоящее время она используется многими исследователями. Однако по дифференциальному закону определение зависимости между напряжением и деформацией не только в первом приближении, но и в самом общем случае, т. е.

$$\sum_{i=0}^N A_i \frac{d^i \varepsilon}{dt^i} = \sum_{i=0}^N B_i \frac{d^i \sigma}{dt^i}, \quad (4)$$

имеет серьезные недостатки [1–4]. Так, по этому закону, описывающему как деформации ползучести, так и релаксации напряжений, в начальный момент времени ядра релаксации и ползучести имеют конечные значения. Многочисленные исследования [1–4] показывают, что $R(0) = K(0) = \infty$.

Таким образом, использование дифференциального закона между напряжением и деформацией (4), в частности, модель типа стандартного вязкоупругого тела, при исследовании динамических задач механики деформируемого твердого тела приводит к определенной неточности, особенно в начальный момент времени. Большой опыт решения динамических задач [9–11] показывает, что ошибки, допущенные в начальный момент времени, существенно влияют на окончательный результат исследования, т. е. происходит накопление ошибок. Поэтому при решении динамических задач механики деформируемого твердого тела желательно использовать интегральный закон между напряжением и деформацией (1) со слабосингулярными ядрами наследственности с особенностью типа Абеля. Самые

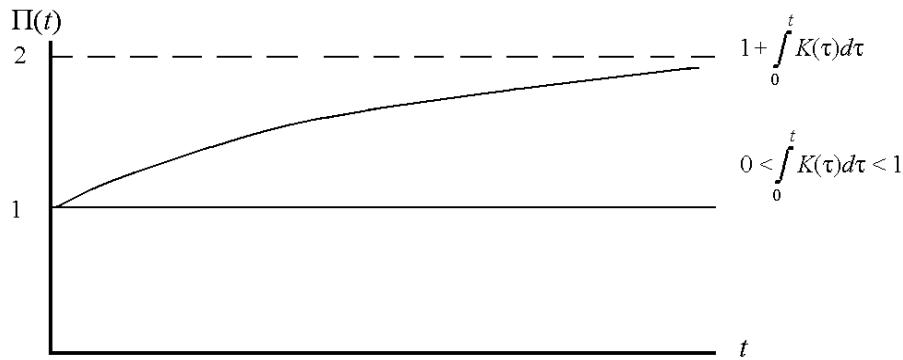


Рис. 1. Процесс ползучести при $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$

общие среди них — трехпараметрические ядра наследственности Ржаницына—Колтунова

$$\begin{aligned} K(t - \tau) &= C \cdot \exp(-\beta(t - \tau)) (t - \tau)^{\alpha-1}, \\ R(t - \tau) &= A \cdot \exp(-\beta(t - \tau)) (t - \tau)^{\alpha-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где C, A, β, α называются реологическими параметрами, причем они удовлетворяют условиям: $C > 0, A > 0, \beta > 0, 0 < \alpha < 1$.

При $\alpha = 1$ зависимость (5) соответствует модели стандартного вязкоупругого тела.

Ниже на численном примере показано влияние реологических параметров на критическую скорость флаттера, собственные и вынужденные колебания линейных и нелинейных задач наследственно-деформируемых систем. Тестом проверки точности результатов расчета, в частности, является качественное исследование по линейным динамическим задачам, выполненное в [12]. Согласно этой работе, колебания всякой линейной наследственно-деформируемой системы (стержень, пластина и оболочка) под действием постоянной нагрузки должны происходить по кривой ползучести и с течением времени должны затухать по этой кривой (рис. 1).

2. Численные примеры

2.1. Рассмотрим вначале прямоугольную вязкоупругую пластинку со сторонами a и b , которая обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью V . Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории Ильюшина [13].

Для случая конечных прогибов пластины, соизмеримых с ее толщиной h , деформации вязкоупругой пластины описываются уравнениями

$$\frac{D}{h} (1 - R^*) \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{BV}{h} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

где R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$, имеющий слабосингулярную особенность типа Абеля:

$$R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Уравнения (6) описывают движение элемента пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. К ним должны быть присоединены граничные и начальные условия.

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a & \quad w = 0, M_x = 0; \\ \text{при } y = 0, y = b & \quad w = 0, M_y = 0. \end{aligned}$$

Этим условиям удовлетворим, представляя искомую функцию $w(x, y, t)$ в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в систему (6) и применяя метод Бубнова — Галёркина, получим систему ИДУ [14]:

$$\ddot{w}_{kl} + \lambda^4 \Omega^2 \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1 - R^*) w_{kl} + MM^* \sum_{n=1}^N \gamma_{kl} w_{nl} = 0, \quad (8)$$

$$w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, L},$$

где $\Omega^2 = \frac{\pi^4}{12(1-\mu^2)} M_E^2 \left(\frac{h}{a} \right)^2$; $M = 2\aleph M_p^2 \left(\frac{a}{h} \right)$; $M^* = \frac{V}{V_\infty}$ — число Маха; $M_E = \sqrt{\frac{E}{\rho V_\infty^2}}$,

$M_p = \sqrt{\frac{P_\infty}{\rho V_\infty^2}}$, $\lambda = \frac{a}{b}$, $\lambda_1 = \frac{a}{h}$, γ_{kl} — безразмерные коэффициенты; $R(t - \tau) = A \cdot \exp(-\beta(t - \tau)) (t - \tau)^{\alpha-1}$, $A > 0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Для систем (8) применяется численный метод, разработанный проф. Ф.Б. Бадаловым [15]. На основе этого метода получим следующий алгоритм численного решения рассмотренных задач:

$$\begin{aligned} w_{ikl} = w_{0kl} + \dot{w}_{0kl} t_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_j (t_i - t_j) \left\{ \lambda^4 \Omega^2 \left[\frac{k^2}{\lambda^2} + l^2 \right]^2 \times \right. \\ \left. \times \left(w_{ikl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-s,kl} \right) + MM^* \sum_{n=1}^N \gamma_{kl} w_{inl} \right\}, \quad (9) \\ i = 1, 2, \dots; \quad n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, L}, \end{aligned}$$

где A_j , B_s — числовые коэффициенты применительно к квадратурным формулам трапеции:

$$\begin{aligned} A_0 = \frac{\Delta t}{2}; \quad A_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, i-1}; \quad A_i = \frac{\Delta t}{2}; \\ B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}; \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha)}{2}, \quad s = j; \quad B_s = \frac{\Delta t^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha)}{2}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений представлены в таблице.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость $V_{кр}$, принимаем условие, предложенное в работах [12, 14].

Для упругой пластинки скорость флаттера составляет 710 м/с, а для вязкоупругой пластинки с регулярными и слабосингулярными ядрами наследственности эта скорость составляет соответственно 657 и 458 м/с.

Из полученных результатов видно, что, если использовать экспоненциальное ядро

$$R(t) = A \cdot \exp(-\beta t), \tag{10}$$

скорость флаттера уменьшается на 7.4 %, а при использовании ядра Ржаницына—Колтунова

$$R(t) = A \cdot \exp(-\beta t)t^{\alpha-1} \tag{11}$$

эта скорость уменьшается на 35.4 % относительно критической скорости флаттера идеально упругих пластин. Однако ядра (10) имеют конечную величину при $t = 0$, а многочисленные исследования [1–4] показывают, что $R(0) = \infty$. Поэтому использование экспоненциальных ядер приводит к определенной неточности, особенно в начальный момент времени. Ошибки, допущенные в начальный момент, существенно влияют на окончательный результат исследования, т. е. происходит накопление ошибок (см. таблицу), так как модель стандартного вязкоупругого тела (3) с ядром (10) не описывает полностью реальных процессов.

Вычислительные эксперименты показали (см. таблицу), что незначительное увеличение параметра сингулярности α приводит к существенному увеличению критической скорости флаттера.

Из приведенной таблицы видно, что влияние параметра затухания β ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра сингулярности α незначительно, и это еще раз подтверждает общеизвестные выводы о том, что экспоненциальное ядро релаксации и модель стандартного вязкоупругого тела (3) неспособны полностью описать наследственные свойства материала конструкций.

По результатам, полученным многими исследователями [12, 16] при использовании интегрального закона между напряжением и деформацией со слабосингулярными ядрами наследственности, очевидно, что параметр вязкости приводит к уменьшению критической скорости (см. таблицу). При исчезающе малом внутреннем трении скорость панельного флаттера приблизительно в 2.5 раза меньше, чем вычисленная в предположении, что внутреннее трение полностью отсутствует [16, 17]. Полученные нами результаты полностью соответствуют выводам и результатам работ [16, 17].

2.2. Теперь рассмотрим следующую систему нелинейных слабосингулярных интегродифференциальных уравнений, описывающую дискретную модель гибких вязкоупругих

Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров пластинки

A	α	β	λ	λ_1	$V_{кр}, \text{ м/с}$
0.0	0.25	0.1	2	250	710
0.1	1	0.1	2	250	657
		0.2			643
0.1	0.25	0.5	2	250	611
		0.1			458
		0.2			446
0.1	0.5	0.5	2	250	433
		0.2			407
		0.7			575
					616

шарнирно закрепленных прямоугольных пластин:

$$\begin{aligned} & \ddot{w}_{kl} + \lambda^4 \Omega^2 \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + l^2 \right]^2 (1 - R^*) w_{kl} + \\ & + \frac{12\lambda^4(1 - \mu^2)\Omega^2}{\pi^2} \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^L a_{klnmirs} w_{nm} (1 - R^*) w_{ir} w_{js} = \alpha_{kl} q_{kl}(t), \quad (12) \\ & w_{kl}(0) = w_{0kl}, \quad \dot{w}_{kl}(0) = \dot{w}_{0kl}, \quad k = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, L}, \end{aligned}$$

где α_{kl} , $a_{klnmirs}$ — безразмерные коэффициенты [14], $q_{kl}(t)$ — интенсивность внешних нагрузок.

Интегрирование системы (12) проводилось численным методом, предложенным в работе [15]. Для этого запишем формулу в интегральной форме, тогда формула численного интегрирования при ядре Ржаницына—Колтунова примет следующий вид:

$$\begin{aligned} w_{ikl} = & w_{0kl} + \dot{w}_{0kl} t_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_j (t_i - t_j) \left\{ \lambda^4 \Omega^2 \left[\frac{k^2}{\lambda^2} + l^2 \right]^2 \left(w_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-s,kl} \right) + \right. \\ & + \frac{12\lambda^4(1 - \mu^2)\Omega^2}{\pi^2} \sum_{n,i_1,j_1=1}^N \sum_{m,r,s_1=1}^L a_{klnm_i_1 r_j_1 s_1} w_{jnm} \left(w_{j i_1 r} w_{j j_1 s_1} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-s, i_1 r} w_{j-s, j_1 s_1} \right) - \alpha_{kl} q_{kl} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots; \quad n = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, L}. \end{aligned}$$

Проанализируем результаты исследований, относящиеся к собственным и вынужденным колебаниям наследственно-деформируемых систем. Сначала исследуем влияние ядра наследственности на собственные колебания системы, так как если известен характер свободных колебаний системы, то можно судить о присущих ей внутренних свойствах, проявляющихся при воздействии внешних возмущений.

Результаты вычислений отражаются графиками (рис. 2–5).

На рис. 2 и 3 приведены графики прогибов в центре пластинки в зависимости от времени при значениях сингулярного параметра α : 1 (кривая 1) и 0.1 (кривая 2). С использованием слабосингулярного ядра наследственности ($\alpha = 0.1$) амплитуда и частота колебаний уменьшаются относительно экспоненциальных ядер наследственности ($\alpha = 1$). С увеличением параметра вязкости A влияние сингулярного параметра α в этом случае достаточно заметно и состоит в резком снижении амплитуды и частоты колебаний (рис. 3).

Теперь исследуем вынужденные колебания пластинки. Примем, что интенсивность внешнего давления постоянна ($q = \text{const}$).

На рис. 4 и 5 показаны зависимости прогиба w от времени t , построенные при значениях сингулярного параметра α : 1 (кривая 1) и 0.5 (кривая 2).

Как видно из графика, при постоянной нагрузке ($q = 0.03$) влияние сингулярного параметра значительно (см. рис. 4). При $\alpha = 1$ увеличивается прогиб пластинки. По кривой ползучести колебания пластинки не происходит — это объясняется тем, что со временем накапливаются ошибки, допущенные в начальный момент времени для регулярного ядра наследственности. С уменьшением параметра $\alpha = 0.5$ и с течением времени заметна существенная перестройка в диаграмме деформирования пластинки (см. рис. 4 и 5), ее колебания под действием постоянной нагрузки происходят по кривой ползучести и с течением

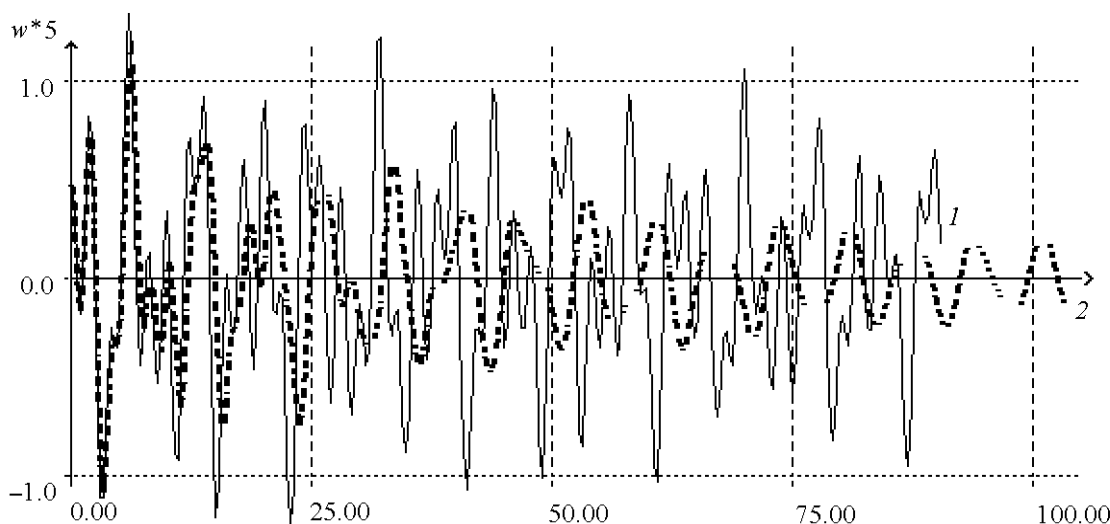


Рис. 2. График прогибов в центре пластины: $\alpha = 1$ (1); $\alpha = 0.1$ (2); (нелинейное); $q = 0$; $A = 0.01$; $\beta = 0.05$; $\lambda = 3$; $\lambda_1 = 300$; $N = 5$

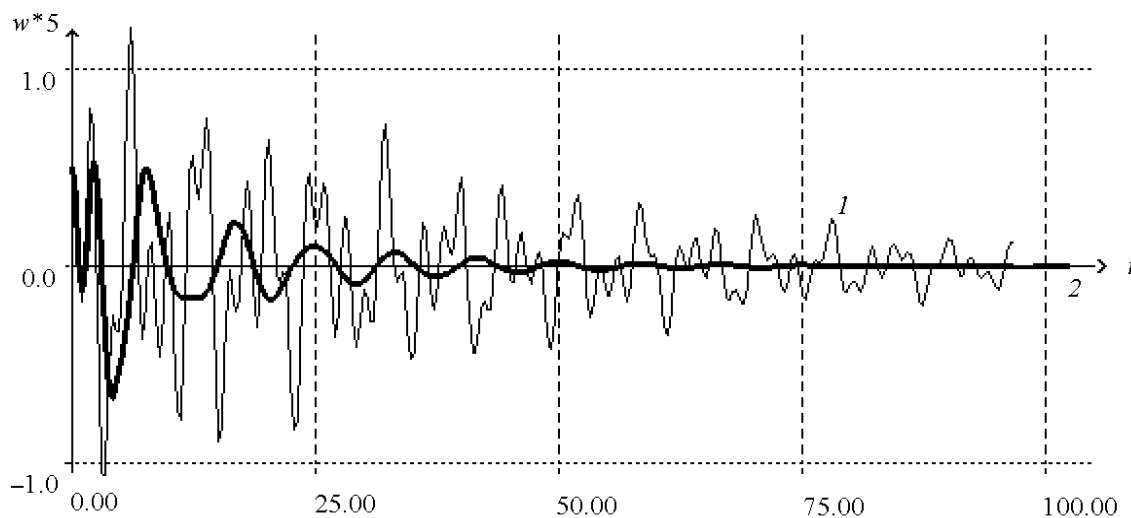


Рис. 3. График прогибов в центре пластины: $\alpha = 1$ (1); $\alpha = 0.1$ (2); (нелинейное); $q = 0$; $A = 0.05$; $\beta = 0.05$; $\lambda = 3$; $\lambda_1 = 300$; $N = 5$

времени затухают. Следовательно, использование регулярных ядер наследственности при решении некоторых динамических задач наследственно-деформируемых систем приводит к неточным результатам.

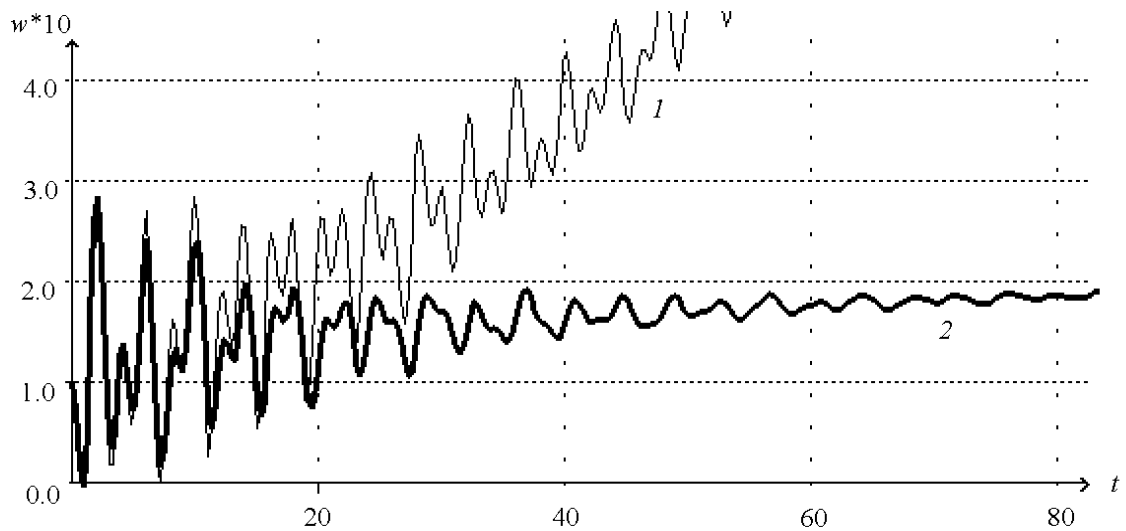


Рис. 4. Зависимость прогиба пластинки от времени t : $\alpha = 1$ (1); $\alpha = 0.5$ (2); (линейное); $A = 0.05$; $\beta = 0,02$; $\lambda = 3$; $\lambda_1 = 300$; $q = 0,03$; $N = 5$

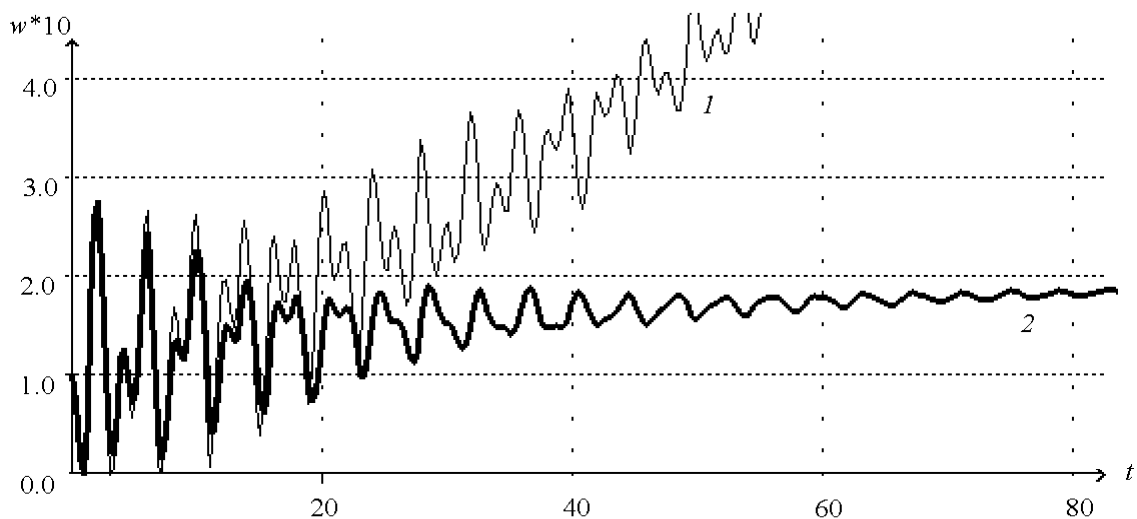


Рис. 5. Зависимость прогиба пластинки от времени t : $\alpha = 1$ (1); $\alpha = 0.5$ (2); (нелинейное); $A = 0.05$; $\beta = 0,02$; $\lambda = 3$; $\lambda_1 = 300$; $q = 0,03$; $N = 5$

Из полученных результатов видно, что в начале движения амплитуды линейных и нелинейных колебаний практически совпадают, но с течением времени амплитуда нелинейных колебаний уменьшается быстрее по сравнению с линейными колебаниями.

Заключение

На основе анализа существующих теоретических и экспериментальных исследований видно, что дифференциальная зависимость между напряжениями и деформациями даже в самом общем случае эквивалентна интегральным зависимостям с регулярными ядрами наследственности, которые имеют серьезный недостаток. Этот недостаток заключается в том, что ядро ползучести, пропорциональное скорости деформации, в начальный мо-

мент времени имеет конечное значение, а эксперимент показывает сколь угодно большую скорость деформирования, т. е. при $t \rightarrow 0$ $K(t) \rightarrow \infty$.

Модель Больцмана—Вольтерра со слабосингулярными ядрами наследственности правильно описывает реальный процесс, так как ядро наследственности со слабосингулярными особенностями типа Абеля удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на ядра ползучести и релаксации. Существующие трехпараметрические слабосингулярные ядра наследственности, т. е. ядра Ржаницына—Колтунова, и дробно экспоненциальные функции Работнова удовлетворяют всем условиям, налагаемым на ядро ползучести и релаксации, и наилучшим образом аппроксимируют опытные данные в течение большого промежутка времени. Поэтому при решении динамических задач наследственно-деформируемых систем желательно использовать интегральные зависимости между напряжениями и деформацией со слабосингулярными ядрами наследственности.

Список литературы

- [1] РАБОТНОВ Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
- [2] РЖАНИЦЫН А.Р. Теория ползучести. М., 1968. 416 с.
- [3] МОСКВИТИН В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
- [4] КОЛТУНОВ М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.
- [5] ИШЛИНСКИЙ А.Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел // Изв. АН СССР, ОТН. 1945. № 3. С. 24–35.
- [6] ИЛЬЮШИН А.А. Пластичность. М.; Л., 1948.
- [7] РЖАНИЦЫН А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: Гостехиздат, 1949.
- [8] ИШЛИНСКИЙ А.Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации // ПММ. 1940. Т. 4, вып. 1.
- [9] БАДАЛОВ Ф.Б. Динамические гасители колебаний наследственно-деформируемых систем. Ташкент: ТашГАИ, 2003. 81 с.
- [10] БАДАЛОВ Ф.Б., АБДУКАРИМОВ А. Функции синуса и косинуса дробного порядка и их приложение к решению динамических задач наследственно-деформируемых систем. Ташкент: Фан, 2004. 155 с.
- [11] БАДАЛОВ Ф.Б. Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Фан, 1980. 220 с.
- [12] БАДАЛОВ Ф.Б., ГАНИХОНОВ Ш.Ф. Вибрации наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов. Ташкент, 2002. 230 с.
- [13] ИЛЬЮШИН А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. 20, вып. 6. С. 733–755.
- [14] ХУДАЯРОВ Б.А. Нелинейный флаттер вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей: дис... канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1998. 129 с.

- [15] Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
- [16] Пановко Я.Н., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
- [17] Денисов Г.Г., Новиков В.В. О влиянии внутреннего трения на устойчивость одномерных упругих систем // Динамика систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1975.

*Поступила в редакцию 28 июня 2006 г.,
в переработанном виде — 20 февраля 2007 г.*