

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАНАЛЕ

В. М. КОВЕНЯ, А. Ю. СЛЮНЯЕВ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: kovenya@ict.nsc.ru, vinny@ngs.ru

On the basis of the splitting method on physical processes and spatial directions, supersonic flows of gas in a channel with an injection of gas from a part of its surface, are numerically investigated. The influence of the Mach and Reynolds numbers on flow characteristics is investigated.

Введение

Интенсивное развитие вычислительных систем и повышение их быстродействия позволяют проводить исследования все более сложных физических процессов. Однако стремление к более полному исследованию изучаемых явлений и соответственно использование наиболее полных математических моделей приводят к возрастанию вычислительных затрат. Таким примером являются задачи аэродинамики, исследование которых на начальных этапах проводилось с помощью системы уравнений Эйлера и других приближений, а затем с развитием вычислительной техники — с использованием полной системы уравнений Навье — Стокса. Численное решение уравнений Навье — Стокса и сегодня представляет большие трудности, что обусловлено нелинейностью исходных уравнений, наличием областей больших градиентов и других особенностей, возникающих при определенных параметрах и режимах гидродинамических течений. Как следствие, это вызывает необходимость разработки и создания специальных численных методов решения этих уравнений. Хотя к настоящему времени разработано много численных алгоритмов и специальных комплексов программ (см., например, [1–8]), проблема создания и применения эффективных численных методов остается открытой.

В настоящей работе используется неявная разностная схема, предложенная ранее авторами [9], основанная на специальном расщеплении исходных многомерных операторов по физическим процессам и пространственным направлениям. Расщепление исходного многомерного оператора по направлениям позволяет свести решение исходной задачи к последовательности одномерных аналогов. Дальнейшее расщепление каждого одномерного оператора по физическим процессам сводит реализацию схемы на дробных шагах к решению одномерных скалярных уравнений.

В настоящей работе дано краткое изложение алгоритма решения уравнений Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа и представлены некоторые результаты расчетов плоских течений вязкого газа в канале. Расчеты проведены в предположении, что

с части канала вдувается газ с трансзвуковой скоростью. Исследовано влияние чисел Маха и Рейнольдса на картину течения, получены основные закономерности течения, зависящие от параметров набегающего потока.

1. Исходные уравнения и численный алгоритм

Для численного решения уравнений Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа в канале в качестве базовой выбрана декартова система координат x_1, x_2 . Однако при проведении расчетов ее использование не всегда удобно. Поэтому в расчетной односвязной области Ω (рис. 1), в которой будем отыскивать численное решение задачи, введем невырожденное преобразование координат:

$$q_j = q_j(x_i), \quad \text{где } j, i = 1, 2, \quad (1)$$

для которого существует его обратное преобразование:

$$x_j = x_j(q_i).$$

Тогда система уравнений Навье — Стокса в новых переменных q_j может быть записана в консервативной форме (см. [9, 10]):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial q_j}. \quad (2)$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{pmatrix} = q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1$$

— соответственно вектор искомых функций и якобиан преобразования координат, а

$$\mathbf{W}_j = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U_j \\ \rho v_1 U_j + q_j^1 p - G_j^1 \\ \rho v_2 U_j + q_j^2 p - G_j^2 \\ (E + p) U_j + Q_j - R_j \end{pmatrix}$$

— векторы потоков в направлении q_j , где соответствующие коэффициенты равны

$$U_j = \sum_{l=1}^2 q_j^l v_l, \quad G_j^l = \sum_{m=1}^2 q_m^j \sigma_l^m, \quad q_j^l = \frac{\partial q_l}{\partial x_j}, \quad R_j = \kappa \sum_{l=1}^2 q_j^l \frac{\partial T}{\partial q_l}, \quad Q_j = \sum_{m=1}^2 v_m \sigma_j^m, \\ \sigma_j^i = \delta_j^i \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \sum_{l=1}^2 \left(q_l^i \frac{\partial v_j}{\partial q_l} + q_j^l \frac{\partial v_i}{\partial q_l} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 q_j^l \frac{\partial v_j}{\partial q_l}, \quad \lambda = \mu' - 2/(3\mu).$$

Выбирая в качестве искомых функций вектор $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$, представим систему уравнений (2) в недивергентном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{F}. \quad (3)$$

Матричные операторы \mathbf{B}_j включают газодинамические члены уравнений и часть вязких членов, содержащих лишь повторные производные по каждому направлению q_j , а вектор \mathbf{F} содержит оставшиеся члены уравнений. Выберем $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, p)^T$. Тогда матричные операторы \mathbf{B}_j для данного вектора \mathbf{f} примут вид

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} U_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_j \frac{\partial}{\partial q_j} - G_j^1 & 0 & a_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & 0 & U_j \frac{\partial}{\partial q_j} - G_j^2 & a_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} & U_j \frac{\partial}{\partial q_j} - G_j^3 \end{pmatrix},$$

где

$$G_j^l = \frac{1}{\rho} \sum_{m=1}^2 q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} b_m^l q_l^j \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad l = 1, 2,$$

$$G_j^3 = \sum_{m=1}^2 q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} \kappa q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{\rho},$$

$$a_j^l = q_j^l / \rho^n, \quad c_j^l = \gamma p^n q_j^l.$$

В преобразованной расчетной области ($0 \leq q_j \leq 1$) введем равномерную разностную сетку по каждому пространственному направлению q_j и аппроксимируем исходные операторы \mathbf{B}_j разностными операторами \mathbf{B}_{jh} с порядком $O(h^k)$. Введем расщепление операторов \mathbf{B}_{jh} на сумму операторов \mathbf{B}_{jh}^l в виде

$$\mathbf{B}_{jh} = \mathbf{B}_{jh}^1 + \mathbf{B}_{jh}^2, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & a_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1 \Lambda_j & c_j^2 \Lambda_j & U_j^n \Lambda_j - G_{jh}^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j U_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_j^n \Lambda_j - G_{jh}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_j \frac{\partial}{\partial q_j} - G_{jh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений (2) или (3) аппроксимируем подобно [9] разностной схемой:

$$\prod_{j=1}^2 (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^1) (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \mathbf{W}_h^n. \quad (5)$$

Схеме (5) эквивалентна схема в дробных шагах:

$$\begin{aligned} \xi^n &= -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \mathbf{W}_h^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^1) \xi^{n+1/4} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^2) \xi^{n+1/2} &= \xi^{n+1/4}, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^1) \xi^{n+3/4} &= \xi^{n+1/2}, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^2) \xi^{n+1} &= \xi^{n+3/4}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Она аппроксимирует нестационарные уравнения Навье — Стокса с порядком $O(\tau + h^2)$, а при установлении уравнения (2) в дивергентной форме — с порядком $O(h^2)$ и в линейном приближении безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$. Реализация схемы (6) на дробных шагах сводится к трехточечным скалярным прогонкам [9]. При построении разностной схемы дифференциальные операторы $\partial/\partial x_j$ в операторах \mathbf{B}_j аппроксимированы разностными операторами Λ_j или $\bar{\Lambda}_j$ с порядком $O(h^k)$ по формулам

$$\begin{aligned} \text{если } v_j \leq 0, \text{ то } \Lambda_j &= \Lambda_{j+}, \quad \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{j-}, \\ \text{если } v_j \geq 0, \text{ то } \Lambda_j &= \Lambda_{j-}, \quad \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{j+} \end{aligned}$$

при $k = 1$, и по формулам

$$\Lambda_j = \bar{\Lambda}_j = (\Lambda_{j-} + \Lambda_{j+})/2$$

для $k = 2$. Здесь $\Lambda_{j\pm} = \mp(I - T_{\pm 1})/h_j$, $T_{\pm 1}f_l = f_{l\pm 1}$ — оператор сдвига. Компоненты вектора \mathbf{W}_h в схемах (5) или (6) аппроксимированы центральными разностями. Как известно, симметричная аппроксимация первых производных приводит к осцилляциям в численном решении. Для их подавления вводится сглаживающий оператор по каждому направлению q_j второго порядка малости подобно [9]

$$\begin{aligned} \Lambda_j Q_l &= \frac{Q_{l+1} - Q_{l-1}}{2h_j} - a \operatorname{sign}(v_j) \varepsilon_1^2 \frac{Q_{l+1} - 2Q_l + Q_{l-1}}{2h_1}, \\ \varepsilon_1^2 &= \begin{cases} \frac{|Q_{l+1} - 2Q_l + Q_{l-1}|}{|Q_{l+1} - Q_l| + |Q_l - Q_{l-1}|}, \\ 0, \text{ если } |Q_{l+1} - Q_l| + |Q_l - Q_{l-1}| = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что введение сглаживания по каждому направлению вида (7) приводит к некоторому понижению устойчивости схемы.

2. Численные расчеты

Апробирование и тестирование описанного выше алгоритма проведены в работе [9]. Ниже приведены результаты численных расчетов течений вязкого газа в канале при наличии вдува газа с части нижней стенки при различных числах Маха и Рейнольдса. Расчетная область (рис. 1), в которой находилось решение задачи, представляет собой прямоугольник $R \in \{-0.5 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 2\}$, а внутри него находится канал. Нижняя стенка канала отнесена от границы расчетной области на расстояние 0.5 и начинается в точке $x_1 = 0.0$, а верхняя стенка смещена относительно нижней стенки вправо на $x_1 = 0.5$.

Стационарное решение задачи находилось в приближении уравнений Навье — Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа в преобразованных координатах (2) по разностной схеме (6). Преобразование координат задавалось в виде

$$q_1 = \left(\frac{x_1 - a}{b - a} \right)^\theta, \quad q_2 = \left| \frac{y_1(x_1) - 1}{y_2(x_1) - y_1(x_1)} \right|^\beta.$$

Здесь $y_1(x_1)$, $y_2(x_1)$ — уравнения нижней и верхней стенок канала; θ и β — коэффициенты сгущения узлов сетки к границам расчетной области; a и b — левая и правая границы расчетной области.

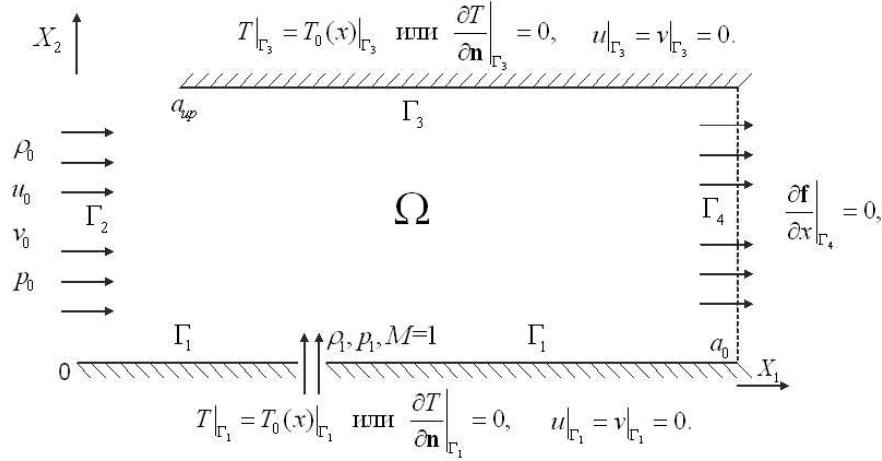


Рис. 1. Расчетная область

На границе области при $x_1 = -0.5$ задавался невозмущенный сверхзвуковой поток, параллельный оси x_1 , на линиях $x_2 = 0, -0.5 \leq x_1 \leq 0.0$ и $x_2 = 2, -0.5 \leq x_1 \leq 0.5$ задавались условия симметрии, на стенках канала — условия прилипания и тепловой изоляции $v_j = 0, \partial T / \partial x_2 = 0$, а на выходе из канала — мягкие условия $\partial^m \mathbf{f} / \partial x^m = 0$, где $m = 1$ или 2 . На нижней стенке канала задавался источник подачи газа, начинающийся в точке $x = 1.0$ шириной 0.05 единицы. Скорость вдува газа полагалась звуковой, т.е. $M_{\text{вд}} = 1.0$, скорость набегающего потока варьировалась в пределах $M = 1.5 \dots 2.5$, числа $\text{Re} = 10^3 \dots 10^4, \gamma = 1.4, \text{Pr} = 0.72, \omega = 0.76$.

Для удобства численного интегрирования и анализа результатов исходные уравнения Навье — Стокса приведены к безразмерному виду, где в качестве безразмерных параметров выбраны следующие величины: высота половины канала L , скорость набегающего потока u_0 , плотность газа ρ_0 , температура T_0 . Тогда уравнения (2) или (3) в криволинейной системе координат в безразмерном виде сохраняют ту же форму, а при вторых производных в уравнениях движения и энергии появляются безразмерные параметры — числа Рейнольдса и Прандтля [8]. Стационарное решение задачи находилось методом установления, критерием установления полагалось выполнение условия $(\rho^{n+1} - \rho^n) / (\tau \rho^n) \leq 10^{-4}$ во всех узлах расчетной области. Расчеты проводились на сетке, содержащей 521×161 узлов. Установление к стационарному решению достигалось за ≈ 5500 итераций при использовании в качестве начального несогласованного распределения параметров потока (при $x_1 = -0.5, 0 \leq x_2 \leq 2$ задавались параметры набегающего потока, а в расчетной области задавались нулевая скорость и постоянные значения плотности и температуры). При задании в качестве начального приближения решения задачи при других параметрах (например, при другом числе Рейнольдса или числе Маха) число итераций значительно (в несколько раз) сокращалось.

2.1. Расчеты с различными числами Маха

В первой части работы проведена серия расчетов сверхзвукового течения газа в канале при различных числах Маха и фиксированном числе $\text{Re} = 10^4$. На рис. 2 и 3 представлены распределения поля скорости и изолинии давления для чисел Маха 1.5 и 2.5 . Хорошо видно, что изменение числа Маха в набегающем потоке существенно влияет

на картину течения в канале. Как следует из теории ударных волн, наклон головного скачка уплотнения для случая $M = 1.5$ (см. рис. 2, *a* и 3, *a*) существенно меньше, чем для $M = 2.5$ (рис. 2, *б* и 3, *б*). В первом случае головной скачок уплотнения, возникший около источника вдува, падает на верхнюю стенку и отражается от нее (точнее, от пограничного слоя), затем отражается от нижней стенки канала. Во втором случае скачок уплотнения вызывает отрыв пограничного слоя, возникают два скачка: один инициирован отрывом пограничного слоя, а второй — отражением от пограничного слоя. Далее они также взаимодействуют с потоком в канале и, поскольку они имеют значительно меньший угол наклона, для рассматриваемой расчетной области не успевают взаимодействовать с нижней стенкой.

От числа Маха набегающего потока существенно зависят и размеры областей отрыва пограничного слоя на нижней и верхней стенках канала. При малых числах Маха интенсивность головного скачка недостаточна для отрыва пограничного слоя у верхней стенки и отрыв возникает лишь при $M \geq 1.5$. На рис. 4 представлено распределение коэффициентов поверхностного трения для нижней и верхней стенок канала, это подтверждающие. Как и ожидалось, наименьшие размеры отрывной зоны в окрестности вдува наблюдаются для меньшего числа Маха набегающего потока $M = 1.5$, наибольшие — для $M = 2.5$ (рис. 4, *a*).

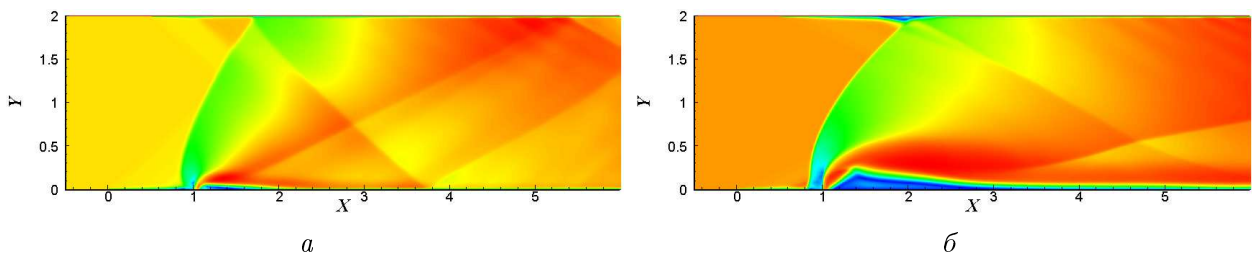


Рис. 2. Поле скорости для $M = 1.5$ (*a*) и $M = 2.5$ (*б*)

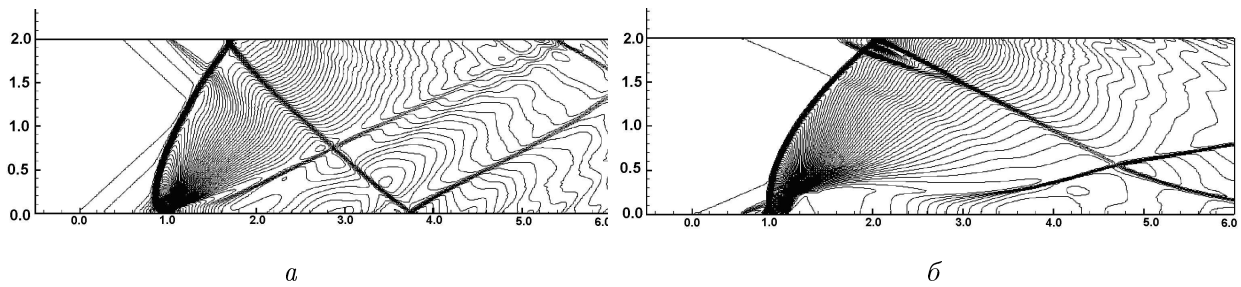


Рис. 3. Изолинии давления для $M = 1.5$ (*a*) и $M = 2.5$ (*б*)

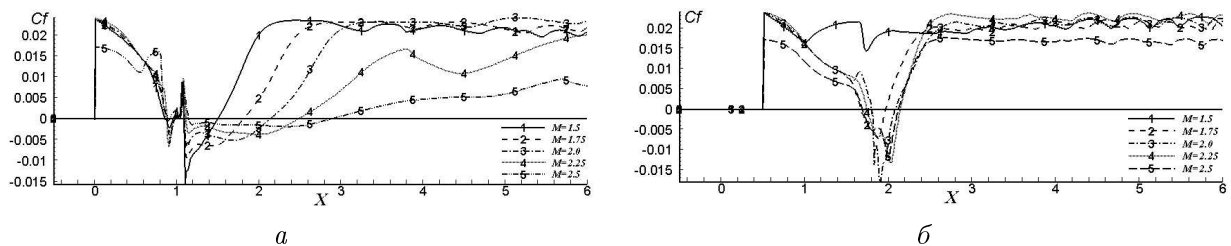


Рис. 4. Коэффициент трения на нижней (*a*) и верхней (*б*) стенках

На рис. 5 представлены распределения полей скорости и области отрыва пограничного слоя около источника вдува для двух значений чисел Маха. Видно, что размеры отрывных зон значительно различаются, что связано с интенсивностью потока газа после прохождения головных скачков. При оценке размеров отрывной зоны для верхней стенки канала можно сказать, что для $M = 1.5$ интенсивности ударной волны не хватает для отрыва пограничного слоя (см. рис. 4, б, линия 1). Начиная с $M = 1.75$ и для всех последующих значений наблюдается отрыв пограничного слоя. Наибольшая ширина отрывной зоны, как и для нижней стенки, наблюдается для максимального числа Маха $M = 2.5$.

На рис. 6 представлено распределение чисел Маха в продольном и поперечном сечениях канала. Отметим, что поток газа после прохождения через головной ударный скачок на уровне $Y = 0.5$ тормозится до примерно одинаковой скорости независимо от скорости набегающего потока (различие скоростей потоков составляет не более 6%). В поперечном сечении ($x = 1.5$) профили скорости подобны для различных чисел Маха.

Распределение давления на нижней и верхней стенках канала приведено на рис. 7. Кривые на рис. 7, б подтверждает, что изменение скорости набегающего потока (числа Маха) приводит к изменению угла наклона головного скачка. При увеличении скорости

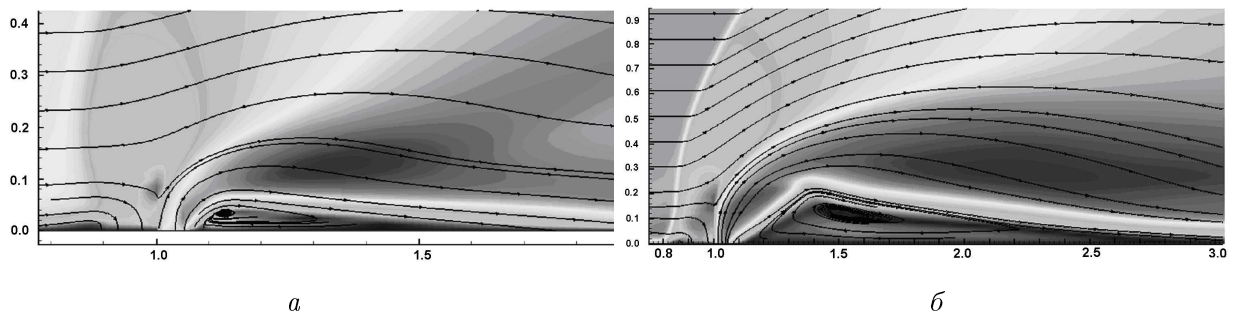


Рис. 5. Линии тока у источника вдува при $M = 1.5$ (а) и $M = 2.5$ (б)

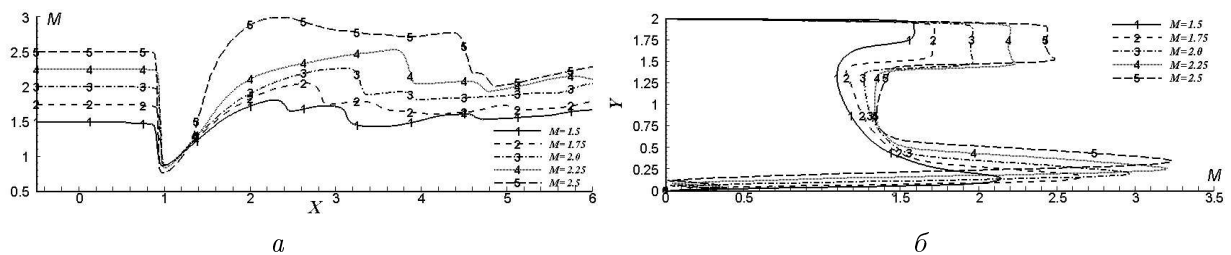


Рис. 6. Распределение чисел Маха в сечениях $Y = 0.5$ (а) и $X = 1.5$ (б)

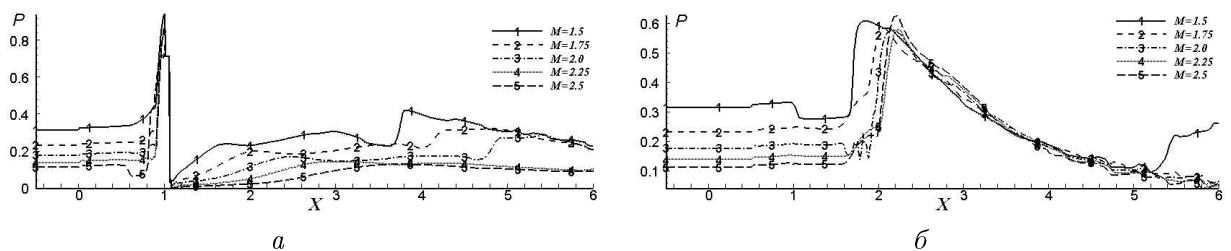


Рис. 7. Распределение давления на нижней (а) и верхней (б) стенках

набегающего потока за источником вдува происходит сильное разрежение газа (см. рис. 7, *a*). Это связано с ускорением течения газа над отрывной зоной и соответственно ускорением истечения газа из отрывной зоны.

2.2. Течения с различными числами Рейнольдса

В следующей серии расчетов проведено моделирование течения газа в канале воздухозаборника со вдувом газа с части поверхности для различных чисел Рейнольдса набегающего потока при фиксированном числе $M = 2.0$. Число Re последовательно задавалось равным 10^3 , $5 \cdot 10^3$ и 10^4 .

На рис. 8 представлены поля скоростей и линии равного уровня давления для всех исследуемых чисел Рейнольдса. Видно, что с уменьшением числа Рейнольдса толщина пограничного слоя на стенках возрастает и от носков нижней и верхней пластин возникают все более сильные скачки уплотнения. В окрестности нижней стенки первый головной скачок и пограничный слой взаимодействуют с головным скачком, возникшим в области вдува. За отрывной зоной в области вдува возникает висячий скачок, который взаимодействует с отраженными скачками. Дальнейшее их взаимодействие приводит к сложной картине течения, которая, конечно, зависит от чисел Рейнольдса. Отрывные зоны у верхней стенки канала, возникшие после падения головного скачка, приводят к перестройке течения и возникновению вторичных отраженных скачков.

Видно (см. рис. 8, *в*), что с уменьшением чисел Рейнольдса толщина пограничного слоя и область с дозвуковыми скоростями возрастают и скачки уплотнения отража-

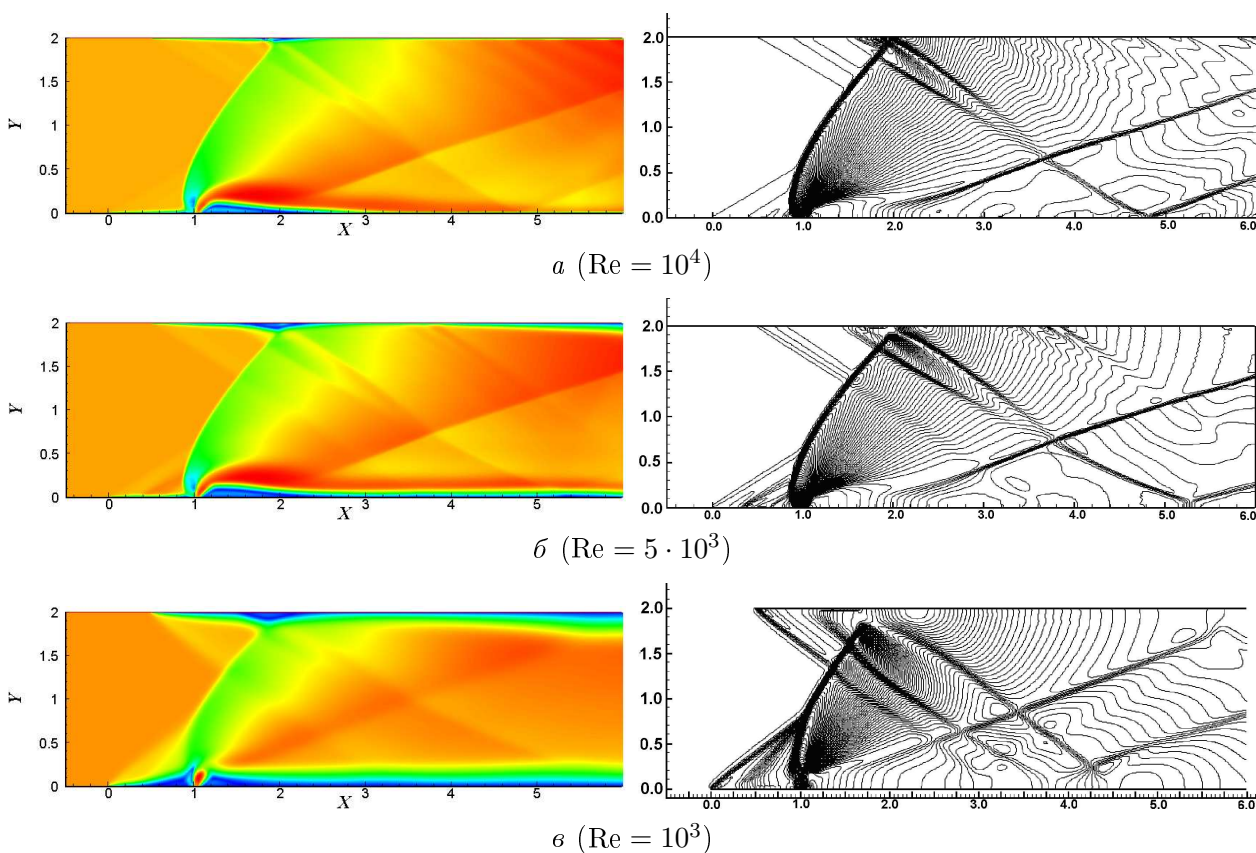


Рис. 8. Поля скоростей (слева) и изолинии давления (справа)

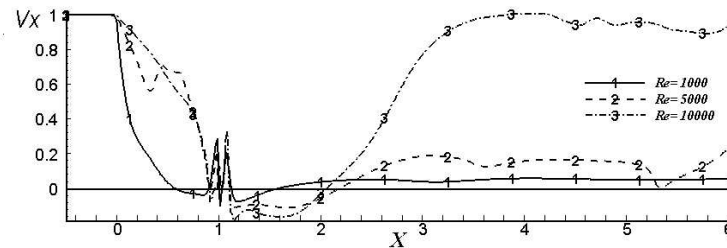


Рис. 9. Распределение x -компоненты скорости в сечении $Y = 0.0125$

ются уже не от стенок канала, а от пограничного слоя. Повышение числа Рейнольдса также приводит к уменьшению зоны отрыва на верхней стенке канала и увеличению зоны отрыва пограничного слоя на нижней стенке канала. Об этом факте также можно судить по рис. 9. Скорость течения (линия 1) значительно падает и после прохождения через скачок уплотнения сохраняет только примерно 5% от своей первоначальной величины. Это и говорит о том, что рассматриваемая область находится в пограничном слое. Совсем другую картину можно наблюдать для максимального числа Рейнольдса. Здесь после прохождения скачка уплотнения и присоединения пограничного слоя поток быстро набирает свою первоначальную скорость.

Выводы

Для расчета течений газа в канале типа воздухозаборник с вдувом газа с части его поверхности применена экономичная схема расщепления (по физическим процессам и пространственным направлениям) второго порядка аппроксимации. Простота реализации схемы на дробных шагах, возможность варьирования шагов сетки и параметров потока в широком диапазоне (на основании большого запаса устойчивости схемы), экономичность алгоритма позволяют получать решения сложных задач при небольших затратах ресурсов ЭВМ.

Проведено моделирование вязких сверхзвуковых течений в канале со вдувом газа с части его поверхности при различных числах Маха и Рейнольдса набегающего потока. Исследовано влияние параметров потока на картину течений в канале и получены основные закономерности их изменения.

Список литературы

- [1] ФЛЕТЧЕР К. Численные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. М.: Мир, 1991.
- [2] ЧИСЛЕННОЕ решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. М.: Наука, 1989.
- [3] КОВЕНЯ В.М., ЯНЕНКО Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1981.
- [4] COMPUTER and Fluids, Special Issue // 6th Intern. Symp. on CFD. 1998. Vol. 27, N 5–6.
- [5] COMPUTATIONAL Fluid Dynamics J. // Special Issue dedicated to prof. H. Daiguji. 1999. Vol. 8, N 2.
- [6] COMPUTATIONAL Fluid Dynamics J. // 4th Asian Workshop on CFD. 2004. Vol. 13, N 2.

- [7] COMPUTER and Fluids // Special Issue dedicated to prof. R. Peuret. 2002. Vol. 31, N 4–7.
- [8] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
- [9] Ковеня В.М. Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004.
- [10] Ковеня В.М., Слюняев А.Ю. Модификации алгоритмов расщепления для решения уравнений газовой динамики и Навье — Стокса // Вычисл. технологии. 2007. Т. 3, № 12.

Поступила в редакцию 1 декабря 2007 г.