

МЕТОД ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ*

В. М. КОВЕНЯ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: kovenya@ict.nsc.ru

Т. В. КОЗЛИНСКАЯ

Новосибирский государственный университет, Россия

e-mail: ktv-sun@gorodok.net

An economical difference scheme of predictor-corrector type for numerical modeling of magnetohydrodynamic equations is proposed. A numerical simulation of scattering of plasma in a non-uniform magnetic field is conducted.

Введение

Задачи физики плазмы и магнитной гидродинамики характеризуются, как правило, нестационарностью и сильной нелинейностью, что приводит к появлению областей больших градиентов и особенностей течений, их изменению со временем и возникновению неустойчивости. Поэтому задача построения численных методов является актуальной. Численные алгоритмы, используемые для решения указанных задач, должны обладать достаточной точностью, большим запасом устойчивости и удовлетворять свойству консервативности, чтобы адекватно описывать решение на больших интервалах времени.

В настоящей работе для решения задач магнитной гидродинамики предлагается разностная схема типа предиктор-корректор, где на этапе предиктора строится схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям, обладающая большим запасом устойчивости, а на этапе корректора восстанавливается консервативность. Заметим, что идеология расщепления предложена в работах [1, 2]. Построенная схема безусловно устойчива (в линейном приближении), что позволяет эффективно использовать ее для расчета нестационарных задач магнитной гидродинамики и физики плазмы. Проведены расчеты разлета высокотемпературной плазмы в магнитном поле.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00146) и Интеграционного проекта СО РАН (№ 116).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

1. Исходные уравнения

Движение плазмы в неоднородном магнитном поле будем рассматривать в одножидкостном магнитогидродинамическом приближении в предположении, что эффекты вязкости и теплопроводности малы и ими можно пренебречь. Тогда система уравнений магнитной гидродинамики включает уравнения неразрывности, движения, полной энергии и уравнения магнитного поля [3]. В цилиндрической системе координат (r, z) в осесимметричном приближении уравнения магнитной гидродинамики в безразмерном виде могут быть представлены в векторной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + W_r + W_z = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } W_r = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) \\ \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r^2) + k_0 r \frac{\partial p}{\partial r} + M_A^2 B_z \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r v_z) - M_A^2 B_r \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} (r v_r p) + l p \frac{\partial}{\partial r} r v_r \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} r (v_z B_r - v_r B_z) \end{pmatrix}, \quad W_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} (n v_z) \\ \frac{\partial}{\partial z} (n v_r v_z) - M_A^2 B_z \frac{\partial B_r}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} (n v_z^2) + k_0 \frac{\partial p}{\partial z} + M_A^2 B_r \frac{\partial B_r}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} (v_z p) + l p \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} (v_r B_z - v_z B_r) \\ 0 \end{pmatrix};$$

$U = (n, n v_r, n v_z, p, B_r, B_z)^T$; $l = \gamma - 1$; $M_A = B_0 / \sqrt{4\pi n_0 U_0^2 m_i}$ — альфвеновское число Маха; $k_0 = T_0 / (U_0^2 m_i)$, m_i — масса иона. Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния в виде

$$p = nT. \quad (2)$$

При преобразованиях уравнений (1) используется условие

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

При переходе к безразмерному виду пространственные координаты нормировались на характерную длину L , время — на L/U_0 , а плотность, температура, скорость и магнитное поле — на их невозмущенные значения n_0, T_0, U_0, B_0 . При построении разностной схемы на этапе предиктора использованы уравнения в недивергентной форме. Выбирая в качестве искомого вектор $f = (n, v_r, v_z, p, B_r, B_z)^T$, перепишем (1) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C_r f + C_z f = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$C_r = \begin{pmatrix} v_r \frac{\partial}{\partial r} & \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{k_0}{n} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & M_A^2 \frac{B_z}{n} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & -M_A^2 \frac{B_r}{n} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\gamma p}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 \\ 0 & \frac{B_z}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & -\frac{B_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} r & 0 & 0 & v_r \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix},$$

$$C_z = \begin{pmatrix} v_z & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_z & 0 & 0 & -M_A^2 B_z/n & 0 \\ 0 & 0 & v_z & k_0/n & M_A^2 B_r/n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & v_z & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & B_r & 0 & v_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} = C \frac{\partial}{\partial z}.$$

При записи матричных операторов C_r и C_z использовано условие (3).

Целью настоящей работы является построение экономичных схем, требующих для своей реализации минимального числа арифметических операций на решение задачи. Это может быть достигнуто на основе метода предиктор-корректор, где на этапе предиктора используется метод расщепления, обладающий большим запасом устойчивости, а на этапе корректора повышается точность метода и восстанавливается консервативность схем. Известно, что расщепление операторов приводит к появлению дополнительных членов в разностной схеме, что, как правило, вызывает понижение точности расчета [4]. Поэтому при построении схемы будем выбирать такие расщепления, которые приводили бы к минимальному числу этих членов при сохранении свойств безусловной устойчивости схемы и ее экономичности, т. е. скалярной разрешимости разностных уравнений на дробных шагах.

2. Разностная схема для одномерных задач

Рассмотрим алгоритм построения разностной схемы для одномерных нестационарных задач. Пусть

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

— система одномерных уравнений магнитной гидродинамики в виде (1), (4), векторы искомых функций f и U совпадают с двумерным случаем, а $\partial W/\partial z = W_z$, $C \partial/\partial z = C_z$. Решение задачи (5) будем находить в области $Q = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq z \leq Z\}$, в которой введем равномерную сетку с шагами τ и h . Аппроксимируем первые производные $\partial/\partial z$ разностным оператором с порядком $O(h^k)$.

Разностная схема предиктор-корректор

$$\begin{aligned} \frac{f^{n+1/2} - f^n}{\tau \alpha} + C^n \Lambda f^{n+1/2} &= 0, \\ \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \Lambda W^{n+1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

аппроксимирует исходные уравнения (5) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5 + O(\tau)$, и на этапе предиктора реализуется векторной прогонкой, как следует из вида оператора C . При $\alpha \geq 0.5$ она безусловно устойчива. Для получения схем, реализуемых скалярными прогонками, представим оператор C в виде расщепления

$$C = C^1 + C^2, \quad (7)$$

где расщепление зададим в следующей форме:

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_z & k_1 & k_2 B_r & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} v_z & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_z & 0 & 0 & -k_2 B_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_z & 0 & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 & v_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z \end{pmatrix}.$$

Здесь $k_1 = k_0/n$, $k_2 = M_A^2/n$.

Разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{f^{n+1/4} - f^n}{\tau\alpha} + C^1 \Lambda f^{n+1/4} = 0, \quad \frac{f^{n+1/2} - f^{n+1/4}}{\tau\alpha} + C^2 \Lambda f^{n+1/2} = 0, \\ \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \Lambda W^{n+1/2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

аппроксимирует исходные уравнения (5) с тем же порядком, что и базовая схема, но в отличие от нее реализуется скалярными прогонками. Действительно, на первом дробном шаге решается система уравнений

$$\begin{aligned} (n^{n+1/4} - n^n)/(\tau\alpha) &= 0, \\ (v_r^{n+1/4} - v_r^n)/(\tau\alpha) &= 0, \\ (v_z^{n+1/4} - v_z^n)/(\tau\alpha) + v_z^n \Lambda v_z^{n+1/4} + k_1 \Lambda p^{n+1/4} + k_2 B_r^n \Lambda B_r^{n+1/4} &= 0, \\ (p^{n+1/4} - p^n)/(\tau\alpha) + \gamma p^n \Lambda v_z^{n+1/4} &= 0, \\ (B_r^{n+1/4} - B_r^n)/(\tau\alpha) + B_r^n \Lambda v_z^{n+1/4} &= 0, \\ (B_z^{n+1/4} - B_z^n)/(\tau\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Исключая $p^{n+1/4}$ и $B_r^{n+1/4}$ из уравнения движения для компоненты $v_z^{n+1/4}$, получим относительно нее разностное уравнение

$$[I + \tau\alpha v_z^n \Lambda - \tau^2 \alpha^2 (k_1 \Lambda \gamma p^n \Lambda + k_2 B_r^n \Lambda B_r^n \Lambda)] v_z^{n+1/4} = v_z^n - \tau\alpha (k_1 \Lambda p^n + k_2 B_r^n \Lambda B_r^n). \quad (10)$$

Его решение находится скалярной прогонкой, после чего явно определяются остальные функции на слое $n + 1/4$. Подобным образом вычисляются значения функций на слое $n+1/2$: исключая $v_r^{n+1/2}$ из уравнения для $B_r^{n+1/2}$, приходим к разностному уравнению вида (10) и решаем его скалярной прогонкой. Все остальные уравнения решаются независимо друг от друга скалярными прогонками. Наконец новые значения U^{n+1} находятся явно из последнего векторного уравнения схемы (8).

Таким образом, решение системы из шести уравнений при переходе с n -го на $(n + 1)$ -й слой находится шестью скалярными прогонками. Введение расщепления (7) приводит в отличие от нефакторизованной схемы (6) к дополнительным членам лишь в уравнении движения для v_z , так как матрица $C^1 \Lambda C^2 \Lambda$ содержит ненулевые элементы лишь в третьей строке. Все другие формы расщепления (7) приводят к большему числу дополнительных членов.

Покажем, что разностная схема (8) для линейных уравнений, полученных из (5) “замораживанием” коэффициентов, безусловно устойчива. Для линейных уравнений разностная схема (8) может быть переписана в виде

$$(I + \tau\alpha C_0^1 \Lambda)(I + \tau\alpha C_0^2 \Lambda) \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau} + C_0 \Lambda f^n = 0, \quad (11)$$

где индекс "0" в матричных операторах означает, что коэффициенты этих матриц постоянны. Пусть для определенности Λ — симметричный оператор. Будем искать численное решение схемы (11) в виде $f^n = f_j^n = f_0 \lambda^n e^{ikjh}$. Подставляя его в (11), получим характеристическое уравнение (при $\alpha = 1$)

$$\begin{aligned} & [(1 + ivd)\lambda - 1]^2 \{ [(1 + ivd)\lambda - 1]^4 - iB_1^2 c^2 d^3 [(1 + ivd)\lambda - 1]^2 \lambda^2 + \\ & + [(1 + ivd)\lambda - 1]^2 [(1 + ivd)\lambda - ivd] (B_1^2 + B_2^2 + c^2) d^2 \lambda + \\ & + B_1^2 B_2^2 d^4 [(1 + ivd)\lambda - 1] [(1 + ivd)\lambda - ivd] \lambda (\lambda - 1) \} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $v = v_z$, $c^2 = \gamma p/n$, $d = (\tau/h) \sin kh$. Очевидно $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/(1 + ivd)$ и $|\lambda_s| \leq 1$ при $s = 1, 2$. Оставшиеся корни могут быть получены из решения уравнения четвертого порядка (выражение $\{ \}$ в (12)). В общем виде получить его решение затруднительно, однако все предельные случаи ($M \gg 1, M \ll 1, M_A \gg 1, M_A \ll 1$) показывают, что $|\lambda_s| \leq 1$ ($s = 3, \dots, 6$). Можно ожидать, что разностная схема безусловно устойчива и в остальных случаях. Схема (8) является обобщением схемы [5], предложенной для решения уравнений газовой динамики.

3. Схема для многомерного случая

Идеология расщепления при построении разностной схемы для одномерных уравнений легко может быть обобщена и на многомерный случай при совместном расщеплении уравнений по пространственным направлениям и расщеплении каждого одномерного оператора. Пусть τ , h_r , h_z — шаги сетки по времени и пространству соответственно. Введем расщепление каждого из операторов C_r и C_z на сумму операторов таким образом, чтобы соответствующая разностная схема реализовалась скалярными прогонками, была безусловно устойчивой и содержала минимальное число дополнительных членов. Тогда по аналогии со схемой (8) разностная схема для решения двумерных задач может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \frac{f^{n+1/8} - f^n}{\tau\alpha} + C_{h,r}^1 f^{n+1/8} = 0, \quad \frac{f^{n+1/4} - f^{n+1/8}}{\tau\alpha} + C_{h,r}^2 f^{n+1/4} = 0, \\ & \frac{f^{n+3/8} - f^{n+1/4}}{\tau\alpha} + C_{h,z}^1 f^{n+3/8} = 0, \quad \frac{f^{n+1/2} - f^{n+3/8}}{\tau\alpha} + C_{h,z}^2 f^{n+1/2} = 0, \\ & \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + W_{h,r}^{n+1/2} + W_{h,z}^{n+1/2} - F^{l+1/2} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $C_{h,r} = C_{h,r}^1 + C_{h,r}^2$, $C_{h,z} = C_{h,z}^1 + C_{h,z}^2$; $W_{h,r}, W_{h,z}$ — разностные операторы, аппроксимирующие соответствующие дифференциальные операторы с порядком $O(h_i^k)$, $i = r, z$:

$$C_{h,r}^1 = \begin{pmatrix} v_r \Lambda_r & (n/r) \Lambda_r r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_r \Lambda_r & 0 & (k_0/n) \Lambda_r & 0 & (M_A^2/n) B_z \bar{\Lambda}_r \\ 0 & 0 & v_r \Lambda_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma p/r) \Lambda_r r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_r/r) \Lambda_r r & 0 \\ 0 & (B_z/r) \Lambda_r r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 C_{h,r}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(M_A^2/n)B_r\bar{\Lambda}_r \\ 0 & 0 & 0 & v_r\Lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(B_r/r)\Lambda_r r & 0 & 0 & v_r\Lambda_r \end{pmatrix}, \\
 C_{h,z}^1 &= \begin{pmatrix} v_z\Lambda_z & n\Lambda_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_z\Lambda_z & 0 & (k_0/n)\Lambda_z & 0 & -(M_A^2/n)B_z\bar{\Lambda}_z \\ 0 & 0 & v_z\Lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p\Lambda_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_z\Lambda_z & 0 \\ 0 & B_z\Lambda_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 C_{h,z}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (M_A^2/n)B_r\bar{\Lambda}_z \\ 0 & 0 & 0 & v_z\Lambda_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_r\Lambda_z & 0 & 0 & v_z\Lambda_z \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_j, \bar{\Lambda}_j$ – разностные операторы, аппроксимирующие первые производные с порядком $O(h_j^k)$, $j = r, z$. В качестве $\Lambda_j, \bar{\Lambda}_j$ могут выбираться симметричные трехточечные операторы ($k = 2$), подобно тому, как представлено в разд. 2, или несимметричные операторы с учетом знака скорости ($k = 1$), задаваемые по формулам [4, 5]:

$$v_j \geq 0 : \Lambda_j = \Lambda_{j-}, \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{j+}; \quad v_j < 0 : \Lambda_j = \Lambda_{j+}, \bar{\Lambda}_j = \Lambda_{j-} \quad (j = r, z).$$

Разностная схема (13) аппроксимирует исходные уравнения с порядком $O(\tau + h^k)$, где $h = \max(h_r, h_z)$, $m = 2$ при $\alpha = 0.5 + O(\tau)$ и $m = 1$ иначе, и безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$. Как следует из вида расщепленных операторов, подобно одномерному случаю она реализуется на дробных шагах скалярными прогонками, а на этапе корректора — явно.

4. Численные расчеты

По предложенной разностной схеме проведены расчеты задачи о распространении облака плазмы ($\gamma = 5/3$). В начальный момент в области $\sqrt{r^2 + z^2} \leq 0.1$ задан скачок давления, превышающий фоновое давление на три порядка (в силу симметрии задачи рассчитывалась только четверть области):

$$\begin{aligned}
 (n, v_r, v_z, p, B_r, B_z)_{t=0}^T &= (n_0, 0, 0, 500, 0, 1)^T \text{ при } \sqrt{r^2 + z^2} \leq 0.1, \\
 \text{иначе } (n, v_r, v_z, p, B_r, B_z)_{t=0}^T &= (1, 0, 0, 0.5, 0, 1)^T.
 \end{aligned}$$

Изучалось распространение облака с течением времени при различных значениях магнитного поля, плотности и температуры при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned}
 z = 0, 0 \leq r \leq 1 : \partial n / \partial z = \partial v_r / \partial z = v_z = \partial p / \partial z = \partial B_r / \partial z = \partial B_z / \partial z = 0, \\
 z = 1, 0 \leq r \leq 1 : n = 1, v_r = 0, v_z = 0, p = 1, B_r = 0, B_z = 1, \\
 r = 0, 0 \leq z \leq 1 : \partial n / \partial z = v_r = \partial v_z / \partial z = \partial p / \partial z = \partial B_r / \partial z = \partial B_z / \partial z = 0, \\
 r = 1, 0 \leq z \leq 1 : n = 1, v_r = 0, v_z = 0, p = 1, B_r = 0, B_z = 1.
 \end{aligned}$$

Численное решение задачи находилось по схеме предиктор-корректор (13) с первым порядком при $\alpha = 0.505$ на расчетных сетках, содержащих 100×100 , 200×200 узлов.

На рис. 1 приведены распределения плотности и давления на момент времени $t = 0.3$ для различных значений n_0 . За счет начального градиента давления облако начинает

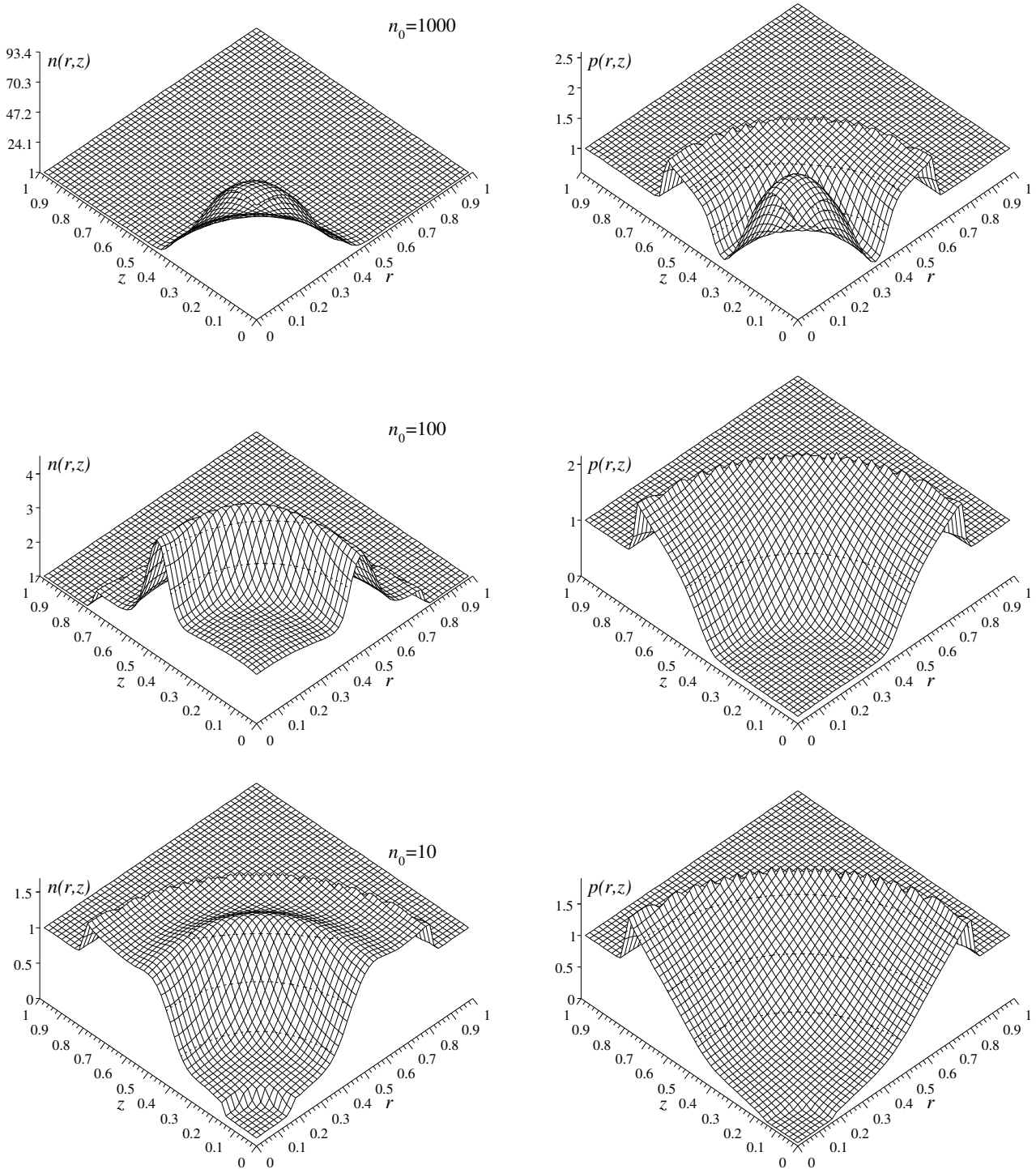


Рис. 1. Разлет плазмы при $M_A = 0$.

расширяться. Формируются две волны плотности. Внутри облака образуется область с пониженной плотностью порядка плотности фоновой плазмы и давлением, которое на несколько порядков ниже давления фоновой плазмы. Чем меньше n_0 , тем быстрее происходит разлет плазмы и быстрее уменьшается плотность в центре области.

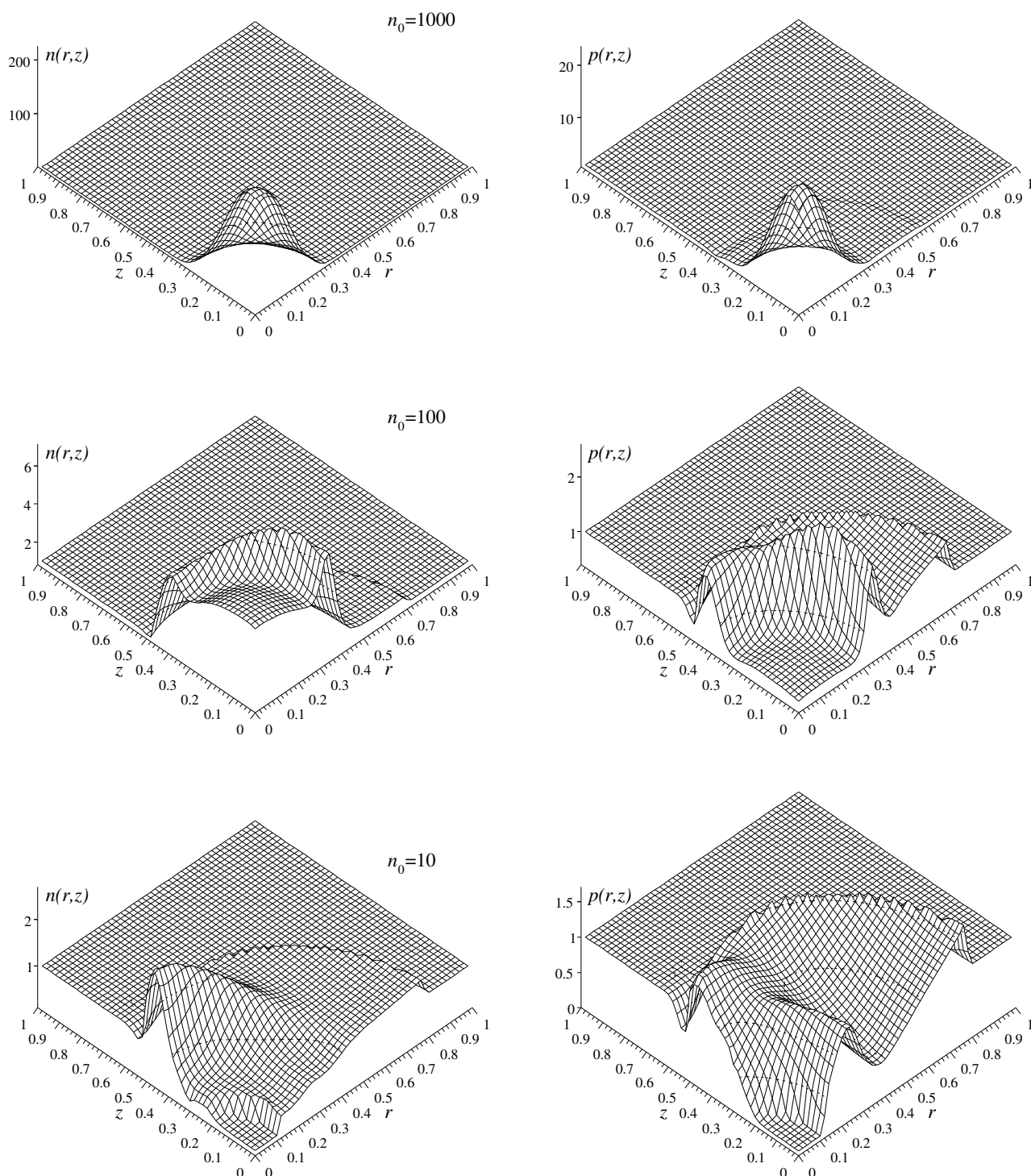
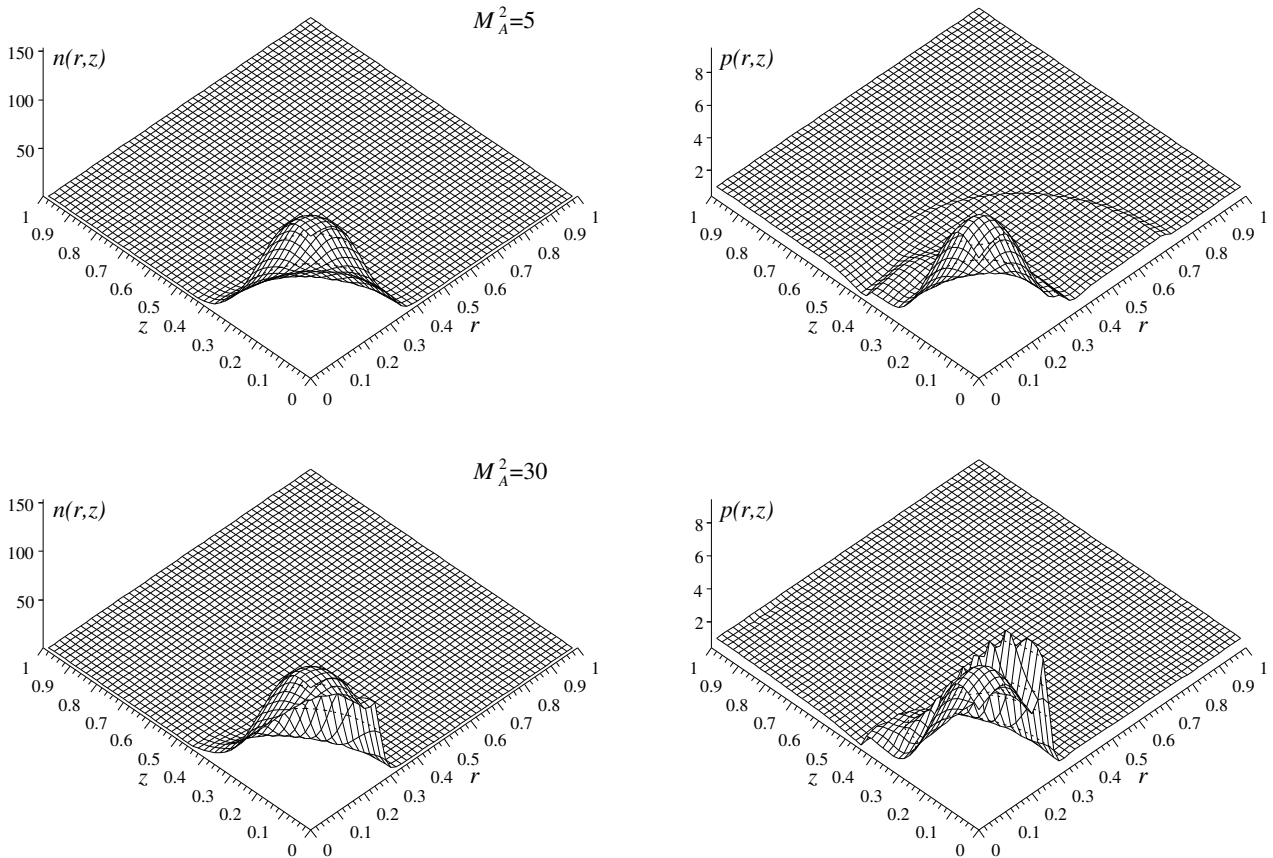


Рис. 2. Разлет плазмы в магнитном поле.

Рис. 3. Разлет плазмы при различных значениях M_A .

В последующих расчетах изучено влияние магнитного поля на распространение облака плазмы при различных значениях M_A . Магнитное поле направлено вдоль оси z , и как следствие градиент магнитного давления направлен по радиусу, что должно приводить к сжатию облака в радиальном направлении.

На рис. 2 представлены распределения плотности и давления для различных значений n_0 на момент времени $t = 0.15$ при $M_A^2 = 5$. Видно, что чем больше n_0 , тем медленнее происходит разлет плазмы и уменьшается плотность плазмы в центре области.

На рис. 3 приведены распределения плотности и давления на момент времени $t = 0.2$ при $n_0 = 1000$ для $M_A^2 = 5, M_A^2 = 30$ соответственно. С возрастанием магнитного поля (увеличением M_A) разлет плазмы в радиальном направлении становится меньше, чем в продольном, при $M_A^2 = 30$ он практически прекращается, облако разделяется на две части, которые разлетаются вдоль оси z . При этом амплитуды плотности и давления сильно возрастают. Разлет в направлении оси z не зависит от магнитного поля.

Результаты проведенных расчетов правильно передают физику исследуемого явления, качественно и количественно совпадают с полученными в [6]. В отличие от [6] предложенная разностная схема безусловно устойчива, позволяет проводить расчеты с большими шагами по времени.

Полученные результаты позволяют сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма и возможности его применения для решения более сложных задач с учетом реальных эффектов.

Список литературы

- [1] Яненко Н.Н. Математика, механика: Избранные труды. М.: Наука, 1991. 416 с.
- [2] Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
- [3] БРАГИНСКИЙ С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Т. 1. С. 183–212.
- [4] Ковеня В.М. Разностные методы решения многомерных задач. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004. 145 с.
- [5] Ковеня В.М., Козлинская Т.В. Об алгоритме расчета нагрева плазмы электронным пучком // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 6. С. 59–67.
- [6] АСТРЕЛИН В.Т., Бурдаков А.В., Губер Н.А., Ковеня В.М. Моделирование движения и нагрева неоднородной плазмы // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 125–140.

Поступила в редакцию 4 апреля 2006 г.