Вычислительные технологии **Том 11, № 6, 2006**

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ t-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

А. М. Блохин
Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия
e-mail: Blokhin@math.nsc.ru

А. С. Ибрагимова
Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: Ibragimova@ngs.ru

A class of differential-difference models for symmetric systems is proposed. Approximate solutions for such models are studied.

Введение

В последние годы в вычислительной практике довольно широкое распространение получил *метод прямых*. Суть этого метода заключается в том, что в исходной дифференциальной задаче производится дискретизация только по части независимых переменных, т. е. исходная система уравнений в частных производных аппроксимируется, например, системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы будем называть полученную таким образом вычислительную модель *дифференциально-разностной моделью*.

Поскольку при применении метода прямых для конкретной проблемы мы сводим исходную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникает вопрос о нахождении приближенных решений дифференциально-разностной модели. Хотя в настоящее время существует достаточно много алгоритмов численного решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, мы в данной работе предлагаем еще один способ нахождения приближенных решений таких краевых задач, использующий методы сплайн-функций. В работе показано также, что предложенный алгоритм может быть сведен к разностной схеме.

1. Предварительные сведения

В качестве исходной математической модели возьмем смешанную задачу для *симметрической t-гиперболической системы* с диссипативными граничными условиями [1, 2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00900 и № 06-08-00384) и междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН-2006 (грант № 46).

Задача I. Найти решение $\mathbf{U}$ симметрической t-гиперболической системы (по Фридрихсу) с постоянными вещественными коэффициентами

$$A \cdot \mathbf{U}_t + B \cdot \mathbf{U}_x + \mathbb{C} \cdot \mathbf{U}_y = 0 \text{ в области } R^3_+, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям при $x = 0,\ l$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{I}} = S \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{II}},\ x = 0, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{II}} = R \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{I}},\ x = l \tag{1.3}$$

и начальным данным при $t = 0$

$$\mathbf{U}(0, x, y) = \mathbf{U}_0(x, y),\ (x, y) \in R^2_l. \tag{1.4}$$

Здесь
$A = \text{block} \ \ \text{diag}(A^{\mathrm{I}}, A^{\mathrm{II}}, A^{\mathrm{III}})$;
$B = \text{block} \ \ \text{diag}(I_{N_0}, -I_{N_1}, O_{N_2})$ — блочно-диагональные матрицы;
$A^{\mathrm{I}} = \text{diag}(a_1, \ldots, a_{N_0})$;
$A^{\mathrm{II}} = \text{diag}(a_{N_0+1}, \ldots, a_{N_0+N_1})$;
$A^{\mathrm{III}} = \text{diag}(a_{N_0+N_1+1}, \ldots, a_N)$ — диагональные матрицы;
$a_i > 0,\ i = \overline{1, N},\ N_0 + N_1 + N_2 = N$;
I_{N_0}, I_{N_1} — единичные матрицы порядка N_0, N_1 соответственно;
O_{N_2} — нулевая квадратная матрица порядка N_2;

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_3 \\ \mathbb{C}_2^* & \mathbb{C}_4 & \mathbb{C}_5 \\ \mathbb{C}_3^* & \mathbb{C}_5^* & \mathbb{C}_6 \end{pmatrix},$$

$\mathbb{C}_1 (= \mathbb{C}_1^*),\ \mathbb{C}_4 (= \mathbb{C}_4^*),\ \mathbb{C}_6 (= \mathbb{C}_6^*)$ — квадратные симметрические матрицы порядка $N_0,\ N_1,\ N_2$ соответственно; $\mathbb{C}_2,\ \mathbb{C}_3,\ \mathbb{C}_5$ — матрицы размерности $N_0 \times N_1,\ N_0 \times N_2,\ N_1 \times N_2$ соответственно;

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, x, y) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \text{ — вектор неизвестных функций,}$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_0} \end{pmatrix},\ \mathbf{U}^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} u_{N_0+1} \\ \vdots \\ u_{N_0+N_1} \end{pmatrix},\ \mathbf{U}^{\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} u_{N_0+N_1+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix};$$

$S,\ R$ — вещественные постоянные матрицы размерности $N_0 \times N_1,\ N_1 \times N_0$ соответственно;
$R^3_+ = \{(t, x, y);\ t > 0,\ 0 < x < l,\ y \in R^1)\}$,
$R^2_l = \{(x, y);\ 0 < x < l,\ y \in R^1)\}$.

Замечание 1.1. Симметрическая система (1.1) с вещественными постоянными коэффициентами записана в так называемом каноническом виде (см. по этому поводу [1, 2]).

Будем полагать далее, что граничные условия (1.2), (1.3) являются строго диссипативными [1], т. е.

$$-(B \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U})|_{x=0} = (\mathbf{U}^{\mathrm{II}}, [I_{N_1} - S^* \cdot S] \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{II}})|_{x=0} \geq k_0 \cdot (\mathbf{U}^{\mathrm{II}}, \mathbf{U}^{\mathrm{II}})\ |_{x=0}; \tag{1.5}$$

$$(B \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U})|_{x=l} = (\mathbf{U}^{\mathrm{I}}, [I_{N_0} - R^* \cdot R] \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{I}})|_{x=l} \geq k_l \cdot (\mathbf{U}^{\mathrm{I}}, \mathbf{U}^{\mathrm{I}})\,|_{x=l}, \tag{1.6}$$

где $k_0,\ k_l > 0$ — некоторые постоянные.

Умножая систему (1.1) скалярно на вектор $2 \cdot \mathbf{U}$, можно на гладких решениях этой системы записать тождество интеграла энергии в дифференциальной форме

$$(A \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U})_t + (B \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U})_x + (\mathbb{C} \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U})_y = 0. \tag{1.7}$$

Интегрируя затем тождество (1.7) по области R_l^2 и учитывая неравенства (1.5), (1.6), мы получим для Задачи I следующую априорную оценку (более подробно вывод априорной оценки описан в [1]):

$$J(t) \leq J(0),\ t > 0. \tag{1.8}$$

Здесь

$$J(t) = \int\!\!\int\limits_{R_l^2} (A \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U}) dxdy,$$

$$J(0) = \int\!\!\int\limits_{R_l^2} (A \cdot \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_0) dxdy.$$

При выводе оценки (1.8) мы полагали также, что

$$(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \to 0 \text{ при } |y| \to \infty.$$

Замечание 1.2. Теорема существования и единственности достаточно гладкого решения Задачи I со строго диссипативными граничными условиями может быть доказана с использованием априорной оценки (1.8) [1].

Рассмотрим так называемую дифференциально-разностную модель для нахождения приближенных решений Задачи I. При этом будем следовать принципу адекватности [3]: дифференциально-разностная модель для Задачи I будет конструироваться так, чтобы она допускала наличие дифференциально-разностного аналога априорной оценки (1.8). Наличие такого аналога априорной оценки будет означать также устойчивость предлагаемой дифференциально-разностной модели [3].

2. Дифференциально-разностная модель для Задачи I

Мы уже отмечали выше, что основная идея при построении дифференциально-разностной модели заключается в том, что в исходной задаче проводится дискретизация только по части независимых переменных (в частности, для Задачи I — по переменным t, y). Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(k \cdot \triangle, x, j \cdot h_y) = \mathbf{U}_j^k(x) = \mathbf{U}_j(x),\ 0 \leq x \leq l,\ k,\ |j| = 0, 1, \ldots,$$

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_j^{k+1}(x), \quad \zeta = \frac{d}{dx},$$

$$\eta_0 = \frac{\theta - \theta^{-1}}{2},\ L_y = \frac{\theta + \theta^{-1}}{2}$$

— разностные операторы, $\theta,\ \theta^{-1}$ — операторы сдвига: $\theta^{\pm 1}\mathbf{U}_j(x) = \mathbf{U}_{j\pm 1}(x),\ \theta^{+1} = \theta, \triangle,\ h_y$ — шаги разностной сетки по переменным t, y.

Сопоставим Задаче I такую дифференциально-разностную модель.

Задача II. Ищем вектор $\mathbf{U}_j^k(x)$, удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$A \cdot \widehat{\mathbf{U}} = A \cdot L_y \mathbf{U} - \triangle B \cdot \zeta \widehat{\mathbf{U}} - r_y \mathbb{C} \cdot \eta_0 \mathbf{U}; \tag{2.1}$$

$$0 < x < l,\ k,\ |j| = 0, 1, \ldots;$$

$$\mathbf{U}_j^{\mathrm{I}} = S \cdot \mathbf{U}_j^{\mathrm{II}},\ x = 0,\ k,\ |j| = 0, 1, \ldots; \tag{2.2}$$

$$\mathbf{U}_j^{\mathrm{II}} = R \cdot \mathbf{U}_j^{\mathrm{I}},\ x = l,\ k,\ |j| = 0, 1, \ldots; \tag{2.3}$$

$$\mathbf{U}_j^0(x) = \mathbf{U}_0(x, j \cdot h_y),\ 0 \le x \le l,\ |j| = 0, 1, \ldots \tag{2.4}$$

Здесь $r_y = \triangle / h_y$.

Замечание 2.1. Равенство (2.1) получается так. В системе (1.1) аппроксимируем производные $\mathbf{U}_t,\ \mathbf{U}_y$ такими разностными выражениями, как

$$\frac{\widehat{\mathbf{U}}_j(x) - L_y \mathbf{U}_j(x)}{\triangle},\ \frac{\eta_0 \mathbf{U}_j(x)}{h_y}.$$

В результате система (1.1) переписывается в виде соотношения (2.1).

С помощью техники построения дифференциально-разностного аналога диссипативного интеграла энергии для Задачи I [3] докажем корректность (устойчивость) Задачи II. Для этого перепишем систему (2.1) так:

$$A \cdot \widehat{\mathbf{U}} = D_1 \cdot \mathbf{U}_{j+1} + D_2 \cdot \mathbf{U}_{j-1} - \triangle B \cdot \zeta \widehat{\mathbf{U}}, \tag{2.1$'$}$$

где

$$D_1 = \frac{1}{2}(A - r_y \mathbb{C}),\ D_2 = \frac{1}{2}(A + r_y \mathbb{C}).$$

Систему (2.1$'$) умножим скалярно на вектор $\widehat{\mathbf{U}}$:

$$(A \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}) = (D_1 \cdot \mathbf{U}_{j+1}, \widehat{\mathbf{U}}) + (D_2 \cdot \mathbf{U}_{j-1}, \widehat{\mathbf{U}}) - \triangle(B \cdot \zeta \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}). \tag{2.5}$$

Заметим, что матрицы $D_{1,2} > 0$, если

$$r_y \cdot \|\mathbb{C}\| < \nu_0.$$

Здесь $\nu_0 = \min\limits_{i=\overline{1,N}} a_i$; $\|\mathbb{C}\| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |\lambda_i|$ — операторная норма матрицы $\mathbb{C}$; $\lambda_i(\mathbb{C}),\ i = \overline{1, N}$, — собственные числа матрицы $\mathbb{C}$.

Поскольку

$$(D_1 \cdot \mathbf{U}_{j+1}, \widehat{\mathbf{U}}) \le \frac{1}{2}(D_1 \cdot \mathbf{U}_{j+1}, \mathbf{U}_{j+1}) + \frac{1}{2}(D_1 \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}),$$

$$(D_2 \cdot \mathbf{U}_{j-1}, \widehat{\mathbf{U}}) \le \frac{1}{2}(D_2 \cdot \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1}) + \frac{1}{2}(D_2 \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}),$$

из (2.5) следует неравенство

$$(A \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}) + \triangle \zeta (B \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}) \le (D_1 \cdot \mathbf{U}_{j+1}, \mathbf{U}_{j+1}) + (D_2 \cdot \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1}). \tag{2.6}$$

Обе части неравенства (2.6) умножим на h_y, просуммируем полученное выражение по j от $-\infty$ до ∞, затем проинтегрируем его по x от нуля до l:

$$J_{k+1} + \triangle h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{(B \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}})|_{x=l} - (B \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}})|_{x=0}\} \leq J_k, \tag{2.7}$$

где

$$J_k = h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^l (A \cdot \mathbf{U}_j^k(x), \mathbf{U}_j^k(x))dx.$$

Наконец, учитывая строгую диссипативность граничных условий (см. неравенства (1.5) и (1.6)), из неравенства (2.7) получаем дифференциально-разностный аналог априорной оценки (1.8):

$$J_k \leq J_0, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

означающий устойчивость дифференциально-разностной модели в энергетической норме $\sqrt{J_k}$ [3].

Замечание 2.2. При выводе неравенств (2.6)–(2.8) мы воспользовались также почти очевидными соотношениями

$$(B \cdot \zeta\widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2}\zeta(B \cdot \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}}),$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \{(D_1 \cdot \mathbf{U}_{j+1}, \mathbf{U}_{j+1}) + (D_2 \cdot \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_{j-1})\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U}).$$

Замечание 2.3. Без труда можно предложить и другие варианты дифференциально-разностных моделей в случае Задачи I [3], для которых можно получить дифференциально-разностный аналог априорной оценки (1.8).

3. Разрешимость Задачи II

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении вектора $\widehat{\mathbf{U}}(x)$ на $(k+1)$-м слое по известному вектору $\mathbf{U}_j^k(x)$ на k-м слое. С учетом специфики матриц A, B (см. разд. 1) систему (2.1) можно переписать так:

$$\zeta\mathbf{V} = \mathcal{A} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{F}; \tag{3.1}$$

$$\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{III}} = L_y\mathbf{U}^{\mathrm{III}} - r_y(A^{\mathrm{III}})^{-1}\mathbb{C}^{\mathrm{III}} \cdot \eta_0\mathbf{U}, \tag{3.2}$$

$$0 < x < l, \ k, \ |j| = 0, 1, \ldots$$

Здесь $\mathbf{V} = \widehat{\mathcal{U}}$; $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{\mathrm{I}} \\ \mathbf{U}^{\mathrm{II}} \end{pmatrix}$;

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\triangle}\text{block diag}(-A^{\mathrm{I}}, \ A^{\mathrm{II}}), \ \widetilde{A} = \text{block diag}(A^{\mathrm{I}}, \ A^{\mathrm{II}});$$

$\widetilde{B} = \text{block diag}(I_{N_0}, \ -I_{N_1})$ — блочно-диагональные матрицы;

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\triangle}\widetilde{B}(\widetilde{A}L_y\mathcal{U} - r_y\widetilde{\mathbb{C}}\eta_0\mathbf{U});$$

$\mathbb{C}^{\text{III}} = (\mathbb{C}_3^* \ \mathbb{C}_5^* \ \mathbb{C}_6)$ — блочная матрица размерности $N_2 \times N$; $\widetilde{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_3 \\ \mathbb{C}_2^* & \mathbb{C}_4 & \mathbb{C}_5 \end{pmatrix}$ — блочная матрица размерности $(N_0 + N_1) \times N$.

Граничные условия для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1) примут следующий вид (см. соотношения (2.2), (2.3)):

$$(I_{N_0}, \ -S) \cdot \mathbf{V}(0) = 0; \tag{3.3}$$

$$(-R, \ I_{N_1}) \cdot \mathbf{V}(l) = 0. \tag{3.4}$$

Здесь $(I_{N_0}, \ -S)$, $(-R, \ I_{N_1})$ — блочные матрицы размерности $N_0 \times (N_0 + N_1)$ и $N_1 \times (N_0 + N_1)$ соответственно.

Поскольку (3.1) — это система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, легко можно найти решение краевой задачи (3.1), (3.3), (3.4) (см. [4, 5]). Ниже мы изложим технологию нахождения приближенных решений этой краевой задачи, основанную на технике сплайн-функций. Заметим, что этот способ пригоден и для случая переменных коэффициентов исходной системы (1.1). Будем искать решение краевой задачи (3.1), (3.3), (3.4) приближенно в виде кубического нелокального сплайна класса C^1 (см. по этому поводу [6]):

$$\begin{gathered} \mathbf{S}_C(x) = (1-\vartheta)^2(1+2\vartheta)\mathcal{U}_j^k(ih_x) + \vartheta^2(3-2\vartheta)\mathcal{U}_j^k((i+1)h_x) + \\ +h_x\vartheta(1-\vartheta)[\mathbf{m}_i(1-\vartheta) - \mathbf{m}_{i+1}\vartheta], \\ x \in [ih_x, (i+1)h_x], \ i = \overline{0, J-1}, \ h_x J = l. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь $\vartheta = (x - ih_x)/h_x$; $\mathbf{m}_i = \zeta \mathcal{U}_j^k|_{x=ih_x}$.

Кубический сплайн (3.5) непрерывен вместе со своей первой производной всюду на отрезке $[0, l]$. Следуя [6], будем полагать, что вторая и третья производные от кубического сплайна (3.5) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \mathbf{S}''_C(ih_x + 0) - \mathbf{S}''_C(ih_x - 0) = \\ = \alpha_i \cdot \{\mathbf{S}'''_C(ih_x + 0) - \mathbf{S}'''_C(ih_x - 0)\}, \ i = \overline{1, J-1}, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где α_i — заданные числа.

Вычисляя с помощью (3.5) векторы

$$\mathbf{S}''_C(ih_x + 0), \ \mathbf{S}''_C(ih_x - 0), \ \mathbf{S}'''_C(ih_x + 0), \ \mathbf{S}'''_C(ih_x - 0)$$

и подставляя их в (3.6), получаем

$$\begin{gathered} (1 - 3\widetilde{\alpha}_i) \cdot \mathbf{m}_{i-1} + 4 \cdot \mathbf{m}_i + (1 + 3\widetilde{\alpha}_i) \cdot \mathbf{m}_{i+1} = 3(1 + 2\widetilde{\alpha}_i)\frac{\xi}{h_x}\mathcal{U}_j^k(ih_x) + \\ +3(1 - 2\widetilde{\alpha}_i)\frac{\bar{\xi}}{h_x}\mathcal{U}_j^k(ih_x), \quad i = \overline{1, J-1}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Здесь $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i / h_x$; $\xi = (\psi - 1)$, $\bar{\xi} = (1 - \psi^{-1})$ — разностные операторы; ψ, ψ^{-1} — операторы сдвига: $\psi^{\pm 1}\mathcal{U}_j^k(ih_x) = \mathcal{U}_j^k((i \pm 1)h_x)$.

Рассматривая равенство (3.7) на $(k+1)$-м слое и исключая вектор $\mathbf{V}$ с помощью системы (3.1), мы придем к такому выражению:

$$\{(1 - 3\widetilde{\alpha}_i)\widetilde{A} - 3(1 - 2\widetilde{\alpha}_i)r_x\widetilde{B}\} \cdot \mathbf{M}_{i-1} + (4\widetilde{A} - 12\widetilde{\alpha}_i r_x \widetilde{B}) \cdot \mathbf{M}_i +$$

$$
\begin{gathered}
+\{(1+3\widetilde{\alpha}_i)\widetilde{A}+3(1+2\widetilde{\alpha}_i)r_x\widetilde{B}\}\cdot\mathbf{M}_{i+1}= \\
=3(1+2\widetilde{\alpha}_i)\frac{\xi}{h_x}\mathbf{Z}+3(1-2\widetilde{\alpha}_i)\frac{\bar{\xi}}{h_x}\mathbf{Z},\quad i=\overline{1,J-1},
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

где $r_x=\triangle/h_x$; $\mathbf{Z}=\widetilde{A}L_y\mathcal{U}-r_y\widetilde{\mathbb{C}}\cdot\eta_0\mathbf{U}$; $\mathbf{M}_i=\zeta\mathbf{V}|_{x=ih_x}$.

Для нахождения производных $\mathbf{M}_i,\ i=\overline{0,J}$, с помощью системы алгебраических уравнений (3.8) необходимо задать краевые условия при $i=0$ и $i=J$. С этой целью положим в системе (3.1) $x=0$ и $x=l$. В итоге получим

$$
\mathbf{M}_0=\mathcal{A}\begin{pmatrix}S\\ I_{N_1}\end{pmatrix}\cdot\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{II}}(0)+\mathcal{F}(0);
\tag{3.9}
$$

$$
\mathbf{M}_J=\mathcal{A}\begin{pmatrix}I_{N_0}\\ R\end{pmatrix}\cdot\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{I}}(l)+\mathcal{F}(l).
\tag{3.10}
$$

Здесь $\begin{pmatrix}S\\ I_{N_1}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}I_{N_0}\\ R\end{pmatrix}$ — блочные матрицы размерности $(N_0+N_1)\times N_1$ и $(N_0+N_1)\times N_0$ соответственно.

Для окончательного определения агрегатов $\mathbf{M}_0,\ \mathbf{M}_J$ к (3.9), (3.10) добавим условия вида [1, 3]

$$
\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{II}}(0)=\mathbf{U}^{\mathrm{II}}(h_x);
\tag{3.11}
$$

$$
\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{I}}(l)=\mathbf{U}^{\mathrm{I}}(l-h_x).
\tag{3.12}
$$

Система (3.8)–(3.10) представляет собой замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\mathbf{M}_i,\ i=\overline{0,J}$ (с учетом условий (3.11), (3.12)). Решение ее можно найти, например, методом прогонки [7, 8]. После этого значения решения $\mathbf{V}(ih_x)$, $i=\overline{1,J-1}$, на $(k+1)$-м слое находятся с помощью системы (3.1). Параметры α_i, $i=\overline{1,J-1}$, r_x выбираются из условий устойчивости прогонки.

В нашем случае эти условия достаточно грубо можно описать так. Обозначим n-ю компоненту агрегата $\mathbf{M}_i,\ i=\overline{0,J},\ 1\le n\le N_0+N_1$, через υ_i. Тогда, учитывая структуру матриц $\widetilde{A},\ \widetilde{B}$, из (3.8)–(3.10) получаем разностную краевую задачу

$$
\left.
\begin{aligned}
\upsilon_0=\varphi_0,\\
\widetilde{a}_i\upsilon_{i-1}+\widetilde{b}_i\upsilon_i+\widetilde{c}_i\upsilon_{i+1}=\varphi_i,\ i=\overline{1,J-1},\\
\upsilon_J=\varphi_J.
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.13}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\widetilde{a}_i=(1-3\widetilde{\alpha}_i)a_n-3(1-2\widetilde{\alpha}_i)r_x\delta_n;\\
\widetilde{b}_i=4a_n-12\widetilde{\alpha}_ir_x\delta_n;\\
\widetilde{c}_i=(1+3\widetilde{\alpha}_i)a_n+3(1+2\widetilde{\alpha}_i)r_x\delta_n;\\
\delta_n=\pm1.
\end{gathered}
$$

Агрегаты $\varphi_i,\ i=\overline{0,J}$, легко могут быть выписаны. Выбирая, например, числа α_i, $i=\overline{1,J-1}$, так, чтобы

$$
-\frac{1}{3}\le\widetilde{\alpha}_i\le\frac{1}{3},\ i=\overline{1,J-1},
\tag{3.14}
$$

а шаг $\triangle$ был достаточно малым, мы придем к выводу, что выполнены условия хорошей обусловленности (устойчивости) разностной краевой задачи (3.13) (см. [7]):

$$
|\widetilde{b}_i|>|\widetilde{a}_i|+|\widetilde{c}_i|,\ i=\overline{1,J-1}.
$$

4. Сведение алгоритма с использованием техники сплайн-функций к разностной схеме

Покажем, что алгоритм, изложенный в предыдущем параграфе, сводится к разностной схеме. С этой целью, в дополнение к вышеприведенным обозначениям, добавим еще одно:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(k\triangle, ih_x, jh_y) = \mathbf{U}_{ij}^k = \mathbf{U}_{ij} = \mathbf{U}_i = \mathbf{U}_j$$

— сеточная вектор-функция, $k,\ |j| = 0, 1, \dots,\ i = \overline{0, J}$.

Система (3.1) при $x = ih_x$ запишется так:

$$\mathbf{M}_i = \mathcal{A} \cdot \mathbf{V}_i + \mathcal{F}_\mathbf{i},\ i = \overline{1, J-1}. \tag{4.1}$$

Здесь

$$\mathcal{F}_i = -\mathcal{A} L_y \mathcal{U}_i - \widetilde{B}\widetilde{\mathbb{C}} \cdot \frac{\eta_0 \mathbf{U}_i}{h_y} = \frac{1}{\triangle}\widetilde{B} \cdot \mathbf{Z}_i,$$

$$\mathbf{Z}_i = \widetilde{A} L_y \mathcal{U}_i - r_y \widetilde{\mathbb{C}} \cdot \eta_0 \mathbf{U}_i.$$

Подставляя вектор $\mathbf{M}_i$ из (4.1) в (3.8), получим

$$\{(1-3\widetilde{\alpha}_i)\widetilde{A} - 3(1-2\widetilde{\alpha}_i)r_x\widetilde{B}\}\mathcal{A}\cdot\mathbf{V}_{i-1} + (4\widetilde{A} - 12\widetilde{\alpha}_i r_x \widetilde{B})\mathcal{A}\cdot\mathbf{V}_i +$$

$$+\{(1+3\widetilde{\alpha}_i)\widetilde{A} + 3(1+2\widetilde{\alpha}_i)r_x\widetilde{B}\}\mathcal{A}\cdot\mathbf{V}_{i+1} + \{(1-3\widetilde{\alpha}_i)\widetilde{A} - 3(1-2\widetilde{\alpha}_i)r_x\widetilde{B}\}\frac{1}{\triangle}\widetilde{B}\cdot\mathbf{Z}_{i-1} +$$

$$+(4\widetilde{A} - 12\widetilde{\alpha}_i r_x\widetilde{B})\frac{1}{\triangle}\widetilde{B}\cdot\mathbf{Z}_i + \{(1+3\widetilde{\alpha}_i)\widetilde{A} + 3(1+2\widetilde{\alpha}_i)r_x\widetilde{B}\}\frac{1}{\triangle}\widetilde{B}\cdot\mathbf{Z}_{i+1} =$$

$$= 3(1+2\widetilde{\alpha}_i)\frac{\xi}{h_x}\mathbf{Z}_i + 3(1-2\widetilde{\alpha}_i)\frac{\bar{\xi}}{h_x}\mathbf{Z}_i,\ i = \overline{1, J-1}. \tag{4.2}$$

С учетом структуры матриц $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \mathcal{A}$ от (4.2) после несложных, но громоздких выкладок приходим к такому выражению:

$$\widetilde{A}\tau\nu_x\mathcal{U}_{ij}^k + \left(\frac{1}{2} + \widetilde{\alpha}_i\right)r_x\widetilde{B}\cdot\xi\mathbf{V}_{ij} + \left(\frac{1}{2} - \widetilde{\alpha}_i\right)r_x\widetilde{B}\cdot\bar{\xi}\mathbf{V}_{ij} + r_y\widetilde{\mathbb{C}}\cdot\eta_0\nu_x\mathbf{U}_{ij}^k = 0,$$

$$k,\ |j| = 0, 1, \dots,\ i = \overline{1, J-1}, \tag{4.3}$$

где

$$\tau = (\varphi - L_y), \quad \nu_x = \frac{(1-3\widetilde{\alpha}_i)\psi^{-1} + 4 + (1+3\widetilde{\alpha}_i)\psi}{6}$$

— разностные операторы; φ — оператор сдвига: $\varphi\mathbf{U}_{ij}^k = \mathbf{U}_{ij}^{k+1} = \widehat{\mathbf{U}}_{ij}$; $\varphi\mathcal{U}_{ij}^k = \mathbf{V}_{ij}$; остальные обозначения даны выше. Наконец, систему (3.2) перепишем в такой форме:

$$A^{\mathrm{III}}\cdot\tau\nu_x\mathbf{U}_{ij}^{\mathrm{III}} + r_y\mathbb{C}^{\mathrm{III}}\cdot\eta_0\nu_x\mathbf{U}_{ij}^{\mathrm{III}} = 0,\ k,\ |j| = 0, 1, \dots,\ i = \overline{1, J-1}. \tag{4.4}$$

Объединяя системы (4.3), (4.4), получим (по терминалогии из монографии [3]) явно-неявную разностную схему для смешанной Задачи I:

$$A\cdot\tau\nu_x\mathbf{U}_{ij}^k + \left(\frac{1}{2} + \widetilde{\alpha}_i\right)r_x B\cdot\xi\widehat{\mathbf{U}}_{ij} + \left(\frac{1}{2} - \widetilde{\alpha}_i\right)r_x B\cdot\bar{\xi}\widehat{\mathbf{U}}_{ij} + r_y\mathbb{C}\cdot\eta_0\nu_x\mathbf{U}_{ij}^k = 0, \tag{4.5}$$

k, $|j| = 0, 1, \ldots$, $i = \overline{1, J-1}$.

Для определения сеточной вектор-функции $\widehat{\mathbf{U}}_{ij}$ мы добавим к разностной схеме (4.5) граничные условия при $i = 0$ и $i = J$ (см. условия (1.2), (1.3), (2.2), (2.3) и условия (3.11), (3.12)):

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{I}}_{0j} = S \cdot \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{II}}_{0j}, \\ \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{II}}_{Jj} = R \cdot \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{I}}_{Jj}, \\ \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{II}}_{0j} = \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_{1j}, \\ \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{I}}_{Jj} = \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_{J-1,j}, \\ k, |j| = 0, 1, \ldots \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

Векторы $\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{III}}_{0j}$, $\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{III}}_{Jj}$ определяются с помощью системы (3.2). При $k = 0$ выполняются начальные данные (см. условия (1.4) и (2.4)):

$$\mathbf{U}^0_{ij} = \mathbf{U}_0(ih_x,\ jh_y),\ i = \overline{0, J}, |j| = 0, 1, \ldots \tag{4.7}$$

Решение разностной смешанной задачи (4.5)–(4.7) находится методом прогонки. Относительно чисел $\widetilde{\alpha}_i$, $i = \overline{1, J-1}$, будем полагать, что выполнены неравенства (3.14).

Замечание 4.1. Используя технику интегралов энергии, разработанную в [3], рассмотрим вопрос об устойчивости разностной схемы (4.5).

Замечание 4.2. Можно предложить и другие варианты реализации граничных условий (вместо (4.6)) для разностной схемы (4.5) (см. по этому поводу [3] и разд. 5).

5. Устойчивость явно-неявной разностной схемы (4.5)

Перепишем разностную схему (4.5) так:

$$A \cdot \nu_x \widehat{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} r_x \cdot \mathbf{B} \cdot \mu_x \widehat{\mathbf{U}} = D_1 \cdot \nu_x \mathbf{U}_{j+1} + D_2 \cdot \nu_x \mathbf{U}_{j-1}. \tag{5.1}$$

Здесь $\mu_x = \{(1 + 2\widetilde{\alpha}_i)\xi + (1 - 2\widetilde{\alpha}_i)\bar{\xi}\}$ — разностный оператор; матрицы $D_{1,2}$ описаны выше.

Следуя рекомендациям из [3], в качестве граничных условий возьмем такие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_0 = \beta S \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_0 - \gamma \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_1, \\ \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_0 = \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_1, \\ \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_J = \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_{J-1}, \\ \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_J = \beta_1 R \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_J - \gamma_1 \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_{J-1}, \\ k, |j| = 0, 1, \ldots \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

Здесь β, β_1, γ, $\gamma_1 > 0$ — вещественные параметры, причем $1 + \gamma = \beta$, $1 + \gamma_1 = \beta_1$.

Умножим систему (5.1) скалярно на $\nu_x \mathbf{U}$, затем — на $h_x h_y$ и просуммируем полученное выражение по i от 1 до $J-1$, по j — от $-\infty$ до ∞ (см. разд. 2). В итоге запишем

$$\widetilde{J}_{k+1} + \triangle h_y \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (B \cdot \mu_x \widehat{\mathbf{U}}, \nu_x \widehat{\mathbf{U}}) \leq \widetilde{J}_k, \tag{5.3}$$

где

$$\widetilde{J}_k = h_x h_y \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A \cdot \nu_x \mathbf{U}, \nu_x \mathbf{U}).$$

Рассмотрим случай, когда все $\widetilde{\alpha}_i = 0$. Тогда

$$\mu_x = \xi + \bar{\xi},\ \nu_x = \frac{1}{6}(\psi + \psi^{-1} + 4).$$

Обозначим через K следующий агрегат:

$$K = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{J-1}(B(\xi+\bar{\xi})\widehat{\mathbf{U}}, (\psi+\psi^{-1}+4)\widehat{\mathbf{U}}) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{J-1}(B(\psi-\psi^{-1})\widehat{\mathbf{U}}, (\psi+\psi^{-1}+4)\widehat{\mathbf{U}}) =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{J-1}\{(B\cdot\psi\widehat{\mathbf{U}}, \psi\widehat{\mathbf{U}}) - (B\cdot\psi^{-1}\widehat{\mathbf{U}}, \psi^{-1}\widehat{\mathbf{U}}) + 4(B\cdot\widehat{\mathbf{U}}, \psi\widehat{\mathbf{U}}) - 4(B\cdot\psi^{-1}\widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{U}})\} =$$

$$= \frac{1}{6}\{-(B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_0, \widehat{\mathbf{U}}_0) - (B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1, \widehat{\mathbf{U}}_1) + (B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_{J-1}, \widehat{\mathbf{U}}_{J-1}) + (B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_J, \widehat{\mathbf{U}}_J) -$$

$$-4(B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_0, \widehat{\mathbf{U}}_1) + 4(B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_{J-1}, \widehat{\mathbf{U}}_J)\} = \frac{1}{6}\{K_1 + K_2\}.$$

Здесь

$$K_1 = -(B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_0, \widehat{\mathbf{U}}_0) - (B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1, \widehat{\mathbf{U}}_1) - 4(B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_0, \widehat{\mathbf{U}}_1),$$

$$K_2 = (B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_{J-1}, \widehat{\mathbf{U}}_{J-1}) + (B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_J, \widehat{\mathbf{U}}_J) + 4(B\cdot\widehat{\mathbf{U}}_{J-1}, \widehat{\mathbf{U}}_J).$$

Поскольку в силу специфики матрицы B

$$K_1 = -(\widehat{\mathbf{U}}_0^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_0^{\mathrm{I}}) + (\widehat{\mathbf{U}}_0^{\mathrm{II}}, \widehat{\mathbf{U}}_0^{\mathrm{II}}) - (\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}) + (\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}) - 4(\widehat{\mathbf{U}}_0^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}) + 4(\widehat{\mathbf{U}}_0^{\mathrm{II}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}),$$

учитывая граничные условия (5.2), получаем

$$K_1 = 6(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}) - (\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}) - [\gamma^2\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}) - 2\beta\gamma\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}) + \beta^2(S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}, S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}})] -$$

$$-4[\beta\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}) - \gamma\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}})] =$$

$$= 6(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}) + (-1+4\gamma-\gamma^2)\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}) - \beta^2(S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}, S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}) - 2\beta(2-\gamma)\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}). \tag{5.4}$$

Из неравенства (1.5) следует

$$-S^*S \geq (k_0 - 1)I_{N_1}. \tag{5.5}$$

Кроме того, справедливо очевидное неравенство (неравенство Шварца — Коши [2]):

$$2|(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}})| \leq (\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}) + (\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}, S^*S\cdot\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}). \tag{5.6}$$

Учитывая (5.5), (5.6) и полагая для определенности $-1 < \gamma < 2$, из (5.4) получаем

$$K_1 \geq \widetilde{q}_0\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{II}}) + \widetilde{g}_0\cdot(\widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}, \widehat{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{I}}), \tag{5.7}$$

где

$$\widetilde{q}_0 = 3q_0 = 3[(1+\gamma)k_0 - (\gamma-1)],$$

$$\widetilde{g}_0 = 3g_0 = 3(\gamma-1),$$

причем $q_0 \geq 0,\ g_0 \geq 0$, если $1 \leq \gamma < 2$, $k_0 \geq \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

Аналогично для агрегата K_2 выводим неравенство

$$K_2 \geq \widetilde{q}_l \cdot (\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{I}}_{J-1}, \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{I}}_{J-1}) + \widetilde{g}_l \cdot (\widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{II}}_{J-1}, \widehat{\mathbf{U}}^{\mathrm{II}}_{J-1}), \tag{5.8}$$

где

$$\widetilde{q}_l = 3q_l = 3[(1+\gamma_1)k_l - (\gamma_1 - 1)],$$
$$\widetilde{g}_l = 3g_l = 3(\gamma_1 - 1),$$

причем $q_l \geq 0,\ g_l \geq 0$, если $1 \leq \gamma_1 < 2$, $k_l \geq \dfrac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}$.

С учетом неравенств (5.7), (5.8) неравенство (5.3) примет вид

$$J_{k+1} \leq J_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Здесь

$$J_k = \widetilde{J}_k + \frac{1}{2}\triangle h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{q_0 \cdot (\mathbf{U}^{\mathrm{II}}_1, \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_1) + g_0 \cdot (\mathbf{U}^{\mathrm{I}}_1, \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_1) + q_l \cdot (\mathbf{U}^{\mathrm{I}}_{J-1}, \mathbf{U}^{\mathrm{I}}_{J-1}) + g_l \cdot (\mathbf{U}^{\mathrm{II}}_{J-1}, \mathbf{U}^{\mathrm{II}}_{J-1})\}.$$

Значит, разностная модель (5.1), (5.2), (4.7) устойчива в “энергетической норме” $\sqrt{J_k}$.

Замечание 5.1. Мы взяли слова “энергетическая норма” в кавычки, поскольку, строго говоря, еще требуется доказать, что

$$J_k > 0 \text{ при } \mathbf{U}^k_{ij} \neq 0.$$

Список литературы

[1] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

[2] Блохин А.М. Элементы теории гиперболических систем и уравнений: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995.

[3] Блохин А.М., Алаев Р.Д. Интегралы энергии и их приложения к исследованию устойчивости разностных схем. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993.

[4] Годунов С.К. Матричная экспонента, матрица Грина и условие Лопатинского: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.

[5] Белман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

[6] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

[7] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.

[8] Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.

Поступила в редакцию 12 мая 2006 г.