

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ВОДОЕМАХ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ\*

В. М. БЕЛОЛИПЕЦКИЙ, П. В. БЕЛОЛИПЕЦКИЙ

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*

e-mail: belolip@icm.krasn.ru

Considered here is a numeric algorithm for solving the equations of an incompressible stratified fluid in the hydrostatic approximation, which is based on the splitting method. Results of calculations based on hydrostatic and none hydrostatic models are compared.

## Введение

Рассматривается численный алгоритм для исследования ветровых течений в замкнутых водоемах, основанный на уравнениях движения стратифицированной жидкости в приближениях Буссинеска, гидростатики, “твердой крышки”, на уравнениях конвекции-диффузии для температуры и солености, использующий метод расщепления по физическим процессам, метод конечных элементов и схему с разностями против потока. Выводятся граничные условия для этапов расщепления. Построено аналитическое решение стационарной задачи для прямоугольной области, которое использовалось в качестве теста. Приводятся результаты сравнения расчетов двумерных в вертикальной плоскости течений по гидростатической и негидростатической моделям.

## 1. Постановка задачи.

### Исходные уравнения и граничные условия

Математическая модель ветровых течений в стратифицированных водоемах (негидростатическая модель) основывается на уравнениях турбулентных течений неоднородной жидкости в приближениях Буссинеска [1]:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U}{\partial z} + lV; \quad (1)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований — ККФН (грант № 05-01-97700-р-енисей), РФФИ-НВО (грант № 05-05-8902 НВО), Министерства образования и науки РФ и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант № RUXO-002-KR-06), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 24.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial V}{\partial z} - lU; \quad (2)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\rho}{\rho_0} g; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} K_{xT} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{yT} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{zT} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (5)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} K_{xC} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{yC} \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{zC} \frac{\partial C}{\partial z}; \quad (6)$$

$$\rho = \rho_0(1 + \rho_1(T, C)).$$

Здесь  $U$ ,  $V$ ,  $W$  — составляющие скорости течения воды в направлениях  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно, ось  $Ox$  направлена на восток, ось  $Oy$  — на север, ось  $Oz$  направлена вниз;  $t$  — время;  $\rho$  — плотность воды;  $\rho_0$  — характерное значение плотности воды;  $p$  — давление;  $g$  — ускорение свободного падения;  $T$  — температура воды;  $C$  — соленость воды;  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ,  $K_{xT}$ ,  $K_{yT}$ ,  $K_{zT}$ ,  $K_{xC}$ ,  $K_{yC}$ ,  $K_{zC}$  — коэффициенты турбулентного обмена;  $l$  — параметр Кориолиса,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}$  — субстанциональная производная.

Уравнения (1)–(6) дополняются начальными и граничными условиями. Начальные условия

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad T = T_0(z), \quad C = C_0(z).$$

Граничные условия на водной поверхности  $z = \zeta(t, x, y)$

$$\begin{aligned} K_z \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad K_z \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\rho_0}, \quad W = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + V \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad p = p_a, \\ K_{zT} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{F_n}{c_p \rho_0}, \quad K_{zC} \frac{\partial C}{\partial z} = -F_C. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия на твердой поверхности:

$$\begin{aligned} U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \\ \cos(n, x) K_{xT} \frac{\partial T}{\partial x} + \cos(n, y) K_{yT} \frac{\partial T}{\partial y} + \cos(n, z) K_{zT} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{F_{\text{дн}}}{c_p \rho_0}, \\ \cos(n, x) K_{xC} \frac{\partial C}{\partial x} + \cos(n, y) K_{yC} \frac{\partial C}{\partial y} + \cos(n, z) K_{zC} \frac{\partial C}{\partial z} = F_{\text{дс}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  — составляющие напряжения трения ветра;  $p_a$  — давление на водной поверхности;  $F_n$  — полный поток тепла через свободную поверхность;  $F_{\text{дн}}$  — теплообмен с ложем водоема;  $F_C$  — поток соли через свободную поверхность;  $F_{\text{дс}}$  — массообмен с ложем водоема;  $n$  — внешняя нормаль к поверхности;  $T_0(z)$ ,  $C_0(z)$  — заданные функции.

Для движений, горизонтальный масштаб которых много больше вертикального, применимо гидростатическое приближение. Вместо уравнения (3) рассматривается уравнение статики [1, 2]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho_0(1 + \rho_1). \quad (9)$$

## Упрощение уравнений

Проинтегрируем уравнение (9) от  $\varsigma$  до  $z$  с учетом граничного условия на водной поверхности:

$$\begin{aligned} p &= g \int_{\varsigma}^z \rho_0(1 + \rho_1) dz + p_a = g\rho_0 \int_0^z (1 + \rho_1) dz - g\rho_0 \int_0^{\varsigma} (1 + \rho_1) dz + p_a \approx \\ &\approx g\rho_0 \int_0^z (1 + \rho_1) dz - g\rho_0\varsigma + p_a. \end{aligned}$$

Для  $p_a = \text{const}$  из предыдущего соотношения следует

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla_2 p = g \int_0^z \nabla_2 \rho_1 dz - g \nabla_2 \varsigma, \quad (10)$$

где  $\nabla_2 = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ .

Проинтегрируем уравнение неразрывности по  $z$  от  $\varsigma$  до  $H$ :

$$\int_{\varsigma}^H \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dz + W|_{z=H} - W|_{z=\varsigma} = 0. \quad (11)$$

Так как выполняются условия на свободной поверхности (7) и прилипания на дне, из (11) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\varsigma}^H U dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varsigma}^H V dz - \frac{\partial \varsigma}{\partial t} = 0.$$

В приближении “твёрдой крышки” это соотношение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^H U dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^H V dz = 0. \quad (12)$$

Итак, в приближениях гидростатики (10) и “твёрдой крышки” (12) для исследования стратифицированных течений в водоемах получена следующая система уравнений:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U}{\partial z} + lV + g \frac{\partial \varsigma}{\partial x} - g \int_0^z \frac{\partial \rho_1}{\partial x} dz; \quad (13)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial V}{\partial z} - lU + g \frac{\partial \varsigma}{\partial y} - g \int_0^z \frac{\partial \rho_1}{\partial y} dz; \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^H U dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^H V dz = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right). \quad (16)$$

Особенностью гидростатического приближения является то, что для определения вертикальной составляющей скорости течения достаточно одного граничного условия (либо на дне, либо на водной поверхности). Система уравнений (13)–(16) дополняется граничными и начальными условиями:

на водной поверхности ( $z = 0$ )

$$K_z \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad K_z \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\rho_0}, \quad W = 0; \quad (17)$$

на дне и боковой границе

$$U = 0, \quad V = 0; \quad (18)$$

начальными условиями

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0. \quad (19)$$

## 2. Численный алгоритм

Сформулированную задачу решаем методом расщепления [3], реализованным в работах [4, 5].

*Этап 1*

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial U^n}{\partial y} + W^n \frac{\partial U^n}{\partial z} &= lV^n, \\ \frac{\tilde{V} - V^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial V^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial V^n}{\partial y} + W^n \frac{\partial V^n}{\partial z} &= -lU^n. \end{aligned} \quad (20)$$

*Этап 2*

$$\begin{aligned} \frac{U^* - \tilde{U}}{\Delta t} &= \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial U^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U^*}{\partial z} - F_1^n, \\ \frac{V^* - \tilde{V}}{\Delta t} &= \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial V^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial V^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial V^*}{\partial z} - F_2^n, \end{aligned} \quad (21)$$

$$F_1^n = g \int_0^z \frac{\partial \rho_1^n}{\partial x} dz, \quad F_2^n = g \int_0^z \frac{\partial \rho_1^n}{\partial y} dz.$$

*Этап 3*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = -\frac{1}{g\Delta t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H U^* dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^H V^* dz \right). \quad (22)$$

*Этап 4*

$$U^{n+1} = U^* + g\Delta t \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad V^{n+1} = V^* + g\Delta t \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad (23)$$

$$W^{n+1} = - \int_0^z \left( \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{n+1}}{\partial y} \right) dz. \quad (24)$$

Здесь  $\Delta t$  — шаг по времени. Уравнение (22) получается в результате подстановки соотношений (23) в уравнение (12). Начальными условиями для этапа 1 являются условия (19).

## Вывод граничных условий для этапов схемы расщепления

Водоем аппроксимируется сеточной областью в виде прямоугольных параллелепипедов. В результате граница области состоит из прямоугольных площадок, расположенных в горизонтальных или вертикальных плоскостях. Вертикальное сечение водоема представляется в виде горизонтальной линии (невозмущенная поверхность воды) и ломаной линии, отрезки которой параллельны соответствующим осям координат. Контур границы водоема аппроксимируется ломаной линией, отрезки которой параллельны оси координат  $Ox$  или  $Oy$ .

Из соотношений (17) и (23) находятся условия на водной поверхности:

$$K_z \frac{\partial U^*}{\partial z} = -\frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad K_z \frac{\partial V^*}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\rho_0}, \quad W = 0. \quad (25)$$

На горизонтальных участках твердой границы  $z = H_i = \text{const}$  по условию прилипания  $U^{n+1} = 0$ ,  $V^{n+1} = 0$ , тогда из (23) следует

$$U^* = -g\Delta t \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad V^* = -g\Delta t \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (26)$$

из (13) и (14) находим

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U^n}{\partial z} + F_1^n, \quad g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial V^n}{\partial z} + F_2^n,$$

следовательно, на горизонтальных площадках границы

$$U^* = \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U^n}{\partial z} - F_1^n \right), \quad V^* = \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial V^n}{\partial z} - F_2^n \right). \quad (27)$$

Аналогично выводятся условия на вертикальных площадках границы:

$$\begin{aligned} U^*|_{x=x_i} &= \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U^n}{\partial x} - F_1^n \right), & V^*|_{x=x_i} &= \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial V^n}{\partial x} - F_2^n \right), \\ U^*|_{y=y_j} &= \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial U^n}{\partial y} - F_1^n \right), & V^*|_{y=y_j} &= \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial V^n}{\partial y} - F_2^n \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Граничные условия для уравнения (22) определяются из условий на границе контура водоема (18) и соотношений (23):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = -\frac{1}{g \Delta t} U^*|_{z=0}^{x=x_i}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Big|_{y=y_j} = -\frac{1}{g \Delta t} V^*|_{z=0}^{y=y_j}. \quad (29)$$

Обычно коэффициенты турбулентного обмена  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{xT}$ ,  $K_{yT}$ ,  $K_{xC}$ ,  $K_{yC}$  считают постоянными. Коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z$  вычисляется по формуле Прандтля — Обухова [6]:

$$K_z = \begin{cases} (0.05h)^2 \sqrt{B} + K_{\min} & \text{при } B \geq 0, \\ K_{\min} & \text{при } B < 0, \end{cases}$$

где

$$B = \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z};$$

$h$  — глубина квазиоднородного слоя, определяемая по первой от поверхности расчетной точке, в которой выполняется условие

$$(0.05z_k)^2 \sqrt{B|_{z=z_k}} \leq K_{\min},$$

$K_{\min}$  — фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена.

После определения составляющих вектора скорости течения вычисляются температура, соленость и плотность воды.

**Замечание 1.** Уравнение (22) для определения  $\zeta$  можно привести к другому виду. Выполним дифференцирование по горизонтальным координатам:

$$g\Delta t \left[ H \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] = - \int_0^H \left( \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial y} \right) dz - \\ - \frac{\partial H}{\partial x} U^*|_{z=H} - \frac{\partial H}{\partial y} V^*|_{z=H},$$

отсюда с учетом (23) следует

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = - \frac{1}{gH\Delta t} \int_0^H \left( \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial y} \right) dz. \quad (30)$$

**Замечание 2.** Задача Неймана (30), (29) имеет единственное (с точностью до постоянной) решение, если выполняется условие [7]

$$\oint \frac{\partial \zeta}{\partial n} d + \int_G f dG = 0. \quad (31)$$

Здесь  $\Gamma$  — граница области  $G$ ;  $n$  — нормаль к границе  $\Gamma$ ;

$$f = \frac{1}{gH\Delta t} \int_0^H \left( \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial y} \right) dz.$$

Так как по формуле Гаусса — Остроградского

$$\int_G f dG = \frac{1}{gH\Delta t} \int_0^H \left( \oint_{\Gamma} V_n^* d\Gamma \right) dz = \frac{1}{g\Delta t} \oint_{\Gamma} V_n^* d\Gamma$$

и по (29)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \frac{1}{g\Delta t} V_n^* \Big|_{\Gamma},$$

условие (31) выполнено.

**Замечание 3.** Из соотношений (23), (24), (30) получаем формулу для вычисления вертикальной составляющей скорости  $W^{n+1}$ :

$$W^{n+1} = - \int_0^z \left( \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial y} \right) dz + \frac{z}{H} \int_0^H \left( \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial y} \right) dz. \quad (32)$$

В гидростатическом приближении вертикальная составляющая скорости  $W^{n+1}$  обращается в нуль только на водной поверхности (либо на дне). На дне (или на водной поверхности)  $W^{n+1}$ , вообще говоря, не равна нулю. Можно из предварительно продифференцированного по вертикали уравнения неразрывности построить решение для  $W^{n+1}$ , удовлетворяющее двум граничным условиям, но тогда уравнение неразрывности внутри области будет выполняться приближенно [2]. В предлагаемом алгоритме согласно (32)  $W^{n+1}|_{z=0} = 0$  и  $W^{n+1}|_{z=H} = 0$ .

Итак, численный алгоритм для исследования трехмерных ветровых течений в стратифицированных водоемах представляется соотношениями (20), (21), (23), (25), (27)–(30), (32).

**Замечание 4.** В качестве граничных условий на твердых участках границы для уравнений (21) можно использовать соотношения (26) с известными (на  $n$ -м временном шаге) правыми частями. Для уравнения (22) граничные условия можно получить из проинтегрированных по  $z$  от 0 до  $H$  уравнений (13), (14) с учетом условий на границе берегового контура водоема (18) и соотношений (23).

### 3. Численный алгоритм для двумерных в вертикальной плоскости течений

Численный алгоритм для двумерных в вертикальной плоскости течений является частным случаем алгоритма для пространственных задач.

*Этап 1*

$$\frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + W^n \frac{\partial U^n}{\partial z} = 0. \quad (33)$$

*Этап 2*

$$\begin{aligned} \frac{U^* - \tilde{U}}{\Delta t} &= \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U^*}{\partial z} - F_1^n, \quad F_1^n = g \int_0^z \frac{\partial \rho_1^n}{\partial x} dz, \\ K_z \frac{\partial U^*}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -\frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad U^*|_{z=H_i} = \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U^n}{\partial z} - F_1^n \right), \\ U^*|_{x=x_i} &= \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U^n}{\partial x} - F_1^n \right). \end{aligned} \quad (34)$$

*Этап 3*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{g \Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H U^* dz, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=x_0} &= -\frac{1}{g \Delta t} U^*|_{z=0}^{x=x_0}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=x_L} = -\frac{1}{g \Delta t} U^*|_{z=0}^{x=x_L}. \end{aligned} \quad (35)$$

*Этап 4*

$$U^{n+1} = U^* + g \Delta t \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad W^{n+1} = -\int_0^z \frac{\partial U^*}{\partial x} dz + \frac{z}{H} \int_0^H \frac{\partial U^*}{\partial x} dz. \quad (36)$$

Для двумерного варианта этапы 3 и 4 упрощаются. Проинтегрируем уравнение относительно  $\zeta$  по  $x$  и с учетом граничных условий для непроточного водоема из (36) получим этап 3а

$$U^{n+1} = U^* - \frac{1}{H} \int_0^H U^* dz, \quad W^{n+1} = - \int_0^z \frac{\partial U^*}{\partial x} dz + \frac{z}{H} \int_0^H \frac{\partial U^*}{\partial x} dz. \quad (37)$$

Таким образом, в данном варианте *исключается этап численного решения задачи (35)*, компоненты вектора скорости определяются в результате последовательного выполнения этапов 1, 2 и 3а.

### 3.1. Аналитическое решение двумерной стационарной задачи

Рассмотрим двумерную стационарную задачу:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F_1(x, z), \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 U dz = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -32(2+a) \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad U|_{z=1} = 0, \\ U|_{x=0} &= 0, \quad U|_{x=L} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad a \geq 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Эта задача имеет аналитическое решение:

$$U = B_0(x) A_1(z), \quad W = -B_1(x) A_0(z), \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 16 \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2, \quad B_1(x) = \frac{32}{L} \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - 2\frac{x}{L}\right), \\ A_0(z) &= z(1-z)^2(1-az), \quad A_1(z) = (1-z) [1 - (3+2a)z + 4az^2]. \end{aligned} \quad (40)$$

Правая часть первого уравнения (38) вычисляется по формуле

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F_1 = A_1^2 B_0 B_1 - A_0 B_0 B_1 \frac{dA_1}{dz} - B_0 \frac{d^2 A_1}{dz^2}. \quad (41)$$

Решение задачи (38) численно будем искать методом установления с помощью алгоритма (33), (34), (37). Предварительно необходимо определить функцию  $F_1(x, z)$ . Проинтегрируем первое уравнение (38) по  $z$  от 0 до 1:

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \int_0^1 F_1 dz = \int_0^1 U \frac{\partial U}{\partial x} dz + \int_0^1 W \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Тогда из первого уравнения (38) получаем интегродифференциальное уравнение для определения  $F_1(x, z)$ :

$$F_1 = \int_0^1 F_1 dz + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=1} - \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} - U \frac{\partial U}{\partial x} - W \frac{\partial U}{\partial z} - \int_0^1 U \frac{\partial U}{\partial x} dz - \int_0^1 W \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$



Решение этого уравнения имеет вид

$$F_1(x, z) = \sum_1^6 b_n z^n, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= -24aB_0 + 2(2+a)B_0B_1, & b_2 &= -(8+8a+2a^2)B_0B_1, \\ b_3 &= (8+16a+8a^2)B_0B_1, & b_4 &= -(3+16a+14a^2)B_0B_1, \\ b_5 &= 6a(1+2a)B_0B_1, & b_6 &= -4a^2B_0B_1. \end{aligned}$$

В частности,  $F_1|_{z=0} = 0$ ,  $F_1|_{z=1} = B_0(B_1 - 24a)$ .

### 3.2. Тестовая задача для нестационарных течений

Рассмотрим упрощенную задачу для ветровых течений однородной жидкости в прямоугольной области  $[0 \leq x \leq L, 0 \leq z \leq H]$  при  $K_x = \text{const}$ ,  $K_z = \text{const}$ , условиях непротекания на вертикальных стенках и условии проскальзывания на дне. Для нахождения  $U$  и  $\varsigma$  получаем задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + g \frac{\partial \varsigma}{\partial x}, \quad (43)$$

$$\int_0^H U dz = 0; \quad (44)$$

$$z = 0: \quad K_z \frac{\partial U}{\partial z} = -\tau; \quad (45)$$

$$z = H: \quad K_z \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad (46)$$

$$x = 0, \quad x = L: \quad U = 0. \quad (47)$$

Проинтегрируем уравнение (43) по  $z$  от нуля до  $H$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^H U dz = K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^H U dz + K_z \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=H} - K_z \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} + gH \frac{\partial \varsigma}{\partial x}.$$

Отсюда в силу условий (44)–(46) находим

$$gH \frac{\partial \varsigma}{\partial x} = -\tau.$$

Для определения  $U$  получаем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\tau}{H}. \quad (48)$$

Таким образом, задача (43)–(47) свелась к задаче (45)–(48).

## 4. Результаты расчетов

**Стационарная задача.** При  $a = 1$  аналитическое решение (39) описывает течение неоднородной жидкости с одной циркуляционной зоной, а для  $a > 1$  — с двумя циркуляционными зонами. Решение задачи (38) предлагаемым методом позволяет проверить правильность постановки граничных условий для этапов расщепления. На рис. 1, *а* приведен пример численного решения стационарной задачи методом установления на прямоугольной сетке  $24 \times 10$  для  $a = 1.8$ ,  $L = 25$ . На грубой расчетной сетке численное решение существенно отличается от аналитического. Однако уже на сетке  $32 \times 20$  результат расчета графически совпадает с аналитическим решением (рис. 1, *б*).

**Нестационарная задача.** Для нестационарной задачи (43)–(47) проведены расчеты как для  $\tau = \text{const}$ , так и для  $\tau = 0.0125 |W_a| / W_a$ , где  $W_a = 10 \sin(\lambda t)$ ,  $\lambda = 20\pi$ . Численные решения задачи (43)–(47) методом расщепления графически совпадали с численными ре-

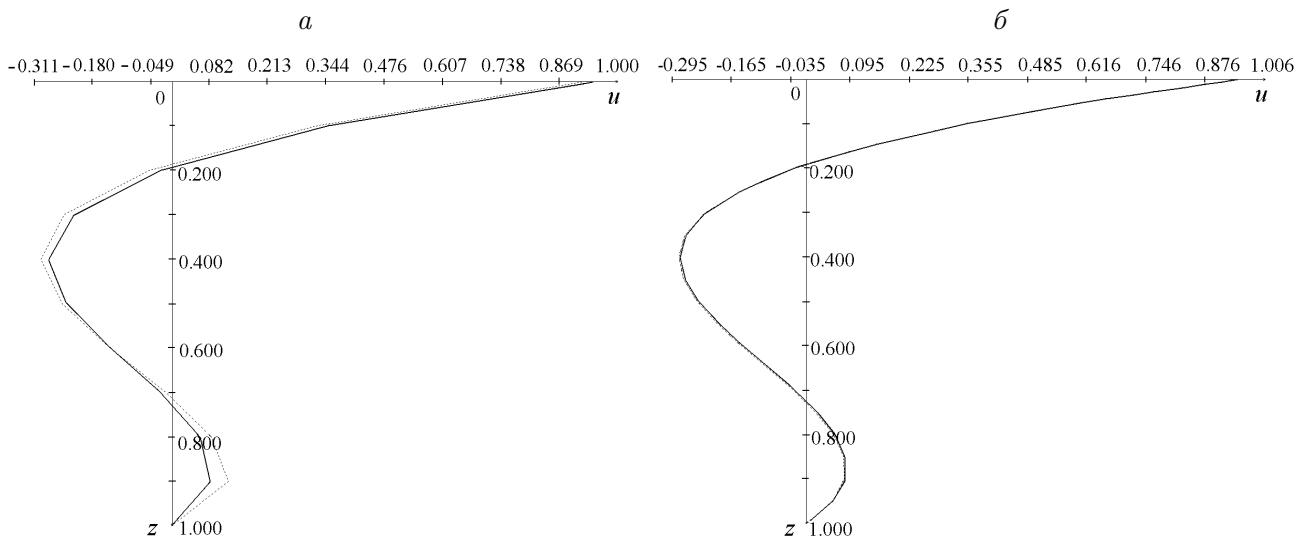


Рис. 1. Решения стационарной задачи (38) ( $L = 25$ ,  $x = L/2$ ): сплошная линия — аналитическое решение, штриховая — численное решение; *а* — сетка  $24 \times 10$ ; *б* — сетка  $32 \times 20$ .

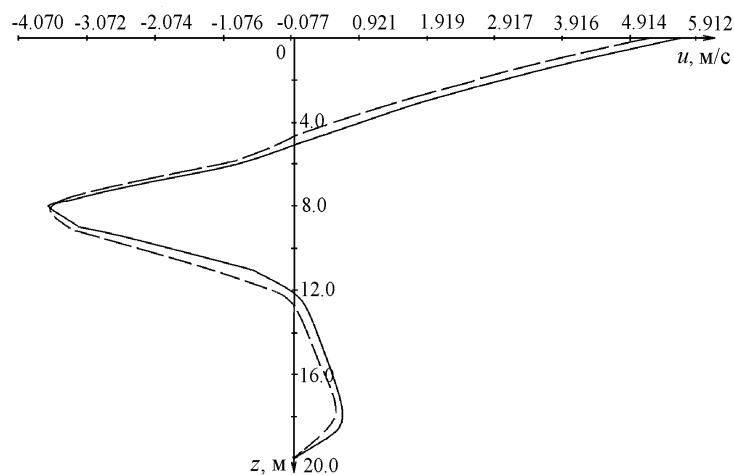


Рис. 2. Профили горизонтальной составляющей скорости течения в глубоководной области водоема: сплошная линия — негидростатическая модель, штриховая — гидростатическая модель.

шениями задачи (45)–(48) (на сетках  $30 \times 30$  при одинаковых шагах по времени). Расчеты показали, что использование в методе расщепления краевых условий с первым порядком приводит к снижению устойчивости численной схемы.

**Сравнение гидростатической и негидростатической моделей.** Сравнение гидростатической и полной моделей гидротермики глубоких водоемов в рамках проекционных методов для двумерных течений выполнено в работе [8]. В настоящей работе проведена серия расчетов двумерных в вертикальной плоскости ветровых течений в непроточном водоеме по гидростатической и негидростатической моделям. На рис. 2 представлены рассчитанные профили горизонтальной составляющей скорости в глубоководной области водоема (глубина водоема 20 м, длина — 4800 м, вода пресная) для ветра 5 м/с и вертикального распределения температуры  $T_0(z)$ :

$$T_0(z) = \begin{cases} 20 & \text{при } 0 \leq z \leq 8, \\ 20 - 2.5(z - 8) & \text{при } 8 \leq z \leq 10, \\ 15 & \text{при } 10 \leq z \leq 20. \end{cases}$$

Для ветра 18 м/с формируется одна циркуляционная зона. Переход от двухциркуляционной картины течения к одноциркуляционной происходит при близких значениях ветра по обеим моделям (для рассмотренного примера при ветре 17.5 м/с).

Сравнение результатов численного моделирования двумерных течений в вертикальной плоскости по гидростатической и негидростатической моделям показало, что обе модели дают достаточно близкие значения скоростей ветровых течений (отличия максимальных значений скоростей не превышают 10%). Поэтому для исследования гидротермических режимов слабопроточных водоемов можно использовать гидростатическое приближение.

## Список литературы

- [1] ФИЛАТОВ Н.Н. Динамика озер. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 166 с.
- [2] САРКИСЯН А.С. Моделирование динамики океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1991. 292 с.
- [3] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.
- [4] БЕЛОЛИПЕЦКИЙ П.В. Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоемах методом конечных элементов // Тр. VI конф. “Динамика и термика рек, водохранилищ и прибрежной зоны морей”. М., 2004. С. 26–29.
- [5] БЕЛОЛИПЕЦКИЙ П.В. Численное моделирование двумерных в вертикальной плоскости ветровых течений в стратифицированных водоемах методом расщепления // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 19–28.
- [6] МАТЕМАТИЧЕСКИЕ модели циркуляции в океане / Г.И. Марчук и др. Новосибирск: Наука, 1980. 288 с.
- [7] МИХАЙЛОВ В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука. 1976. 391 с.
- [8] БОЧАРОВ О.Б., ОВЧИННИКОВА Т.Э. Численное моделирование явления термобара в озере Байкал // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 3. С. 21–28.

*Поступила в редакцию 15 ноября 2005 г.,  
в переработанном виде — 20 февраля 2006 г.*