Вычислительные технологии **Том 11, № 5, 2006**

ОДНОМЕРНАЯ ТЕПЛОВАЯ ВОЛНА В НЕВЯЗКОМ ГАЗЕ*

С. П. Баутин, А. П. Садов
Уральский государственный университет путей сообщения
Екатеринбург, Россия
e-mail: SBautin@math.usart.ru, alsadov@yandex.ru

A system of nonlinear PDE governing 1D symmetric flows of the heat conductive inviscid gas is considered. Plane heat wave solution is constructed provided that the propagation law of its front into a cold homogeneous and quiescent gas is given. Solution is constructed in the form of infinite convergent series in the neighborhood of the front. Gasdynamic parameters have infinite gradients at the front, however the heat flux is continuous and equal to zero. It is shown that the constructed solution is a wave of compression.

Получение больших степеней сжатия газа имеет важное значение для решения многих физических проблем, например, проблемы управляемого термоядерного синтеза [1]. При большом сжатии газа необходимо учитывать равновесное излучение [1–3]. В связи с этим уравнения состояния газа приобретают вид

$$p = R\rho T + \frac{1}{3}\,\sigma T^4, \quad e = c_v T + \sigma \frac{T^4}{\rho}, \quad \sigma = \mathrm{const} > 0. \tag{1}$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; T — температура; e — внутренняя энергия; R — газовая постоянная; σ — константа, связанная с постоянной Стефана — Больцмана σ_* соотношением $\sigma = 4\sigma_*/c_*$, c_* — скорость света в вакууме; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

При учете равновесного излучения в системе уравнений газовой динамики [4] уравнение, являющееся дифференциальной формой закона сохранения энергии, становится нелинейным уравнением теплопроводности в движущейся среде [5], а коэффициент теплопроводности имеет следующий вид [1, 2]:

$$\kappa = 2\frac{\sigma c_* \alpha_*}{(\gamma - 1)}\frac{T^3}{\rho}, \tag{2}$$

где α_* — положительная константа, зависящая от выбора системы единиц; $\gamma - 1 = R/c_v > 0$ — показатель политропы идеального газа.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00205).

Плоскосимметричные течения теплопроводного невязкого газа с уравнениями состояния (1) и коэффициентом теплопроводности (2) описываются [6] следующей системой нелинейных уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + uu_x + \dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_x + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right) T_x\right] = 0, \\ \left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\left(T_t + uT_x\right) + (\gamma - 1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right) u_x = \kappa_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{T^3}{\rho}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right). \end{cases}$$

В этой системе t — время; x — пространственная координата; u — скорость газа;

$$\sigma_1 = \frac{4}{3}\sigma\frac{T_{00}^3}{R\rho_{00}}; \quad \sigma_2 = 3(\gamma-1)\sigma_1; \quad \kappa_0 = \frac{2\sigma c_* \alpha_* T_{00}^3}{Ru_{00}\rho_{00}^2 x_{00}};$$

положительные постоянные T_{00}, ρ_{00} и x_{00} являются масштабными значениями соответственно температуры, плотности и расстояния при введении стандартным образом безразмерных переменных; за масштабное значение скорости газа взята скорость звука в нетеплопроводном идеальном газе: $u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}}$.

В настоящей работе рассматриваются течения, непрерывно примыкающие к холодному однородному покоящемуся газу. В реальных физических экспериментах эффекты лучистой теплопроводности проявляются при очень больших значениях температуры нагретого газа. Поэтому при моделировании подобных течений часто полагают температуру фона нулевой [1, 2].

Цель исследования — построить одномерную тепловую волну в невязком газе в случае задания ее фронта.

Однородный холодный покоящийся газ со значениями параметров

$$\rho(x,t) = 1, \quad u(x,t) = 0, \quad T(x,t) = 0 \tag{3}$$

принимается в качестве фонового течения. Также берется некоторая аналитическая в окрестности $t = 0$ функция $a(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$a'(0) \neq 0. \tag{4}$$

Кривая $x = a(t)$ будет задавать фронт тепловой волны, на котором она с $T > 0$ непрерывным образом стыкуется с фоновым течением. Условие (4) означает, что тепловая волна движется с ненулевой скоростью.

Делается замена независимых переменных

$$\begin{cases} z = x - a(t), \\ \tau = t, \end{cases} \tag{5}$$

т. е. фронт тепловой волны берется за новую координатную ось $z = 0$ и тогда условие (4) обеспечивает невырожденность преобразований (5) в некоторой окрестности точки $t = 0$, в частности, $\partial/\partial x = \partial/\partial z$.

При замене (5) исходная система перейдет в систему

$$\begin{cases} \rho_\tau + \left[u - a'(\tau)\right]\rho_z + \rho u_z = 0, \\ u_\tau + \left[u - a'(\tau)\right]u_z + \dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_z + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right)T_z\right] = 0, \\ \left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\left\{T_\tau + \left[u - a'(\tau)\right]T_z\right\} + (\gamma-1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right)u_z = \\ = \kappa_0\left(\dfrac{T^3}{\rho}T_{zz} + \dfrac{3T^2}{\rho}T_z^2 - \dfrac{T^3}{\rho^2}\rho_z T_z\right). \end{cases} \tag{6}$$

Для нее в соответствии с (3) ставятся начальные условия при $z = 0$

$$\rho(\tau, z)|_{z=0} = 1, \quad u(\tau, z)|_{z=0} = 0, \quad T(\tau, z)|_{z=0} = 0. \tag{7}$$

В этом случае у задачи (6), (7) имеется особенность: в третьем уравнении системы коэффициент перед старшей производной равен нулю. Это приводит к тому, что на фронте тепловой волны возникает бесконечный градиент, что подтверждают последующие аналитические выкладки и численные расчеты бегущих волн [7, 8]. Для описания этой особенности на фронте тепловой волны делается следующая замена независимых переменных:

$$\begin{cases} \xi = \sqrt[3]{z}, \\ \tau' = \tau. \end{cases} \tag{8}$$

Далее штрих для облегчения написания опущен. Конкретное значение показателя корня в замене (8) определяется показателем степени температуры в коэффициенте теплопроводности [9].

Система (6) в переменных ξ, τ (тогда, в частности, $\partial/\partial z = \partial/\partial \xi \cdot 1/3\xi^2$) имеет вид

$$\begin{cases} 3\xi^2 \rho_\tau + (u - a'(\tau))\, \rho_\xi + \rho u_\xi = 0, \\ 3\xi^2 u_\tau + (u - a'(\tau))\, u_\xi + \dfrac{1}{\gamma\rho} \left[T \rho_\xi + (\rho + \sigma_1 T^3)\, T_\xi\right] = 0, \\ 3\xi^3 \left(\rho + \sigma_2 T^3\right) \left(3\xi^2 T_\tau + [u - a'(\tau)]\, T_\xi\right) + 3\xi^3 (\gamma - 1) T \left(\rho + \sigma_1 T^3\right) u_\xi = \\ = \kappa_0 \left[\xi \dfrac{T^3}{\rho} T_{\xi\xi} - \dfrac{2T^3}{\rho} T_\xi - \xi \dfrac{T^3}{\rho^2} T_\xi \rho_\xi + \xi \dfrac{3T^2}{\rho} T_\xi^2\right]. \end{cases} \tag{9}$$

При получении этой системы для того, чтобы убрать степени ξ из знаменателей, первое и второе уравнения были умножены на $3\xi^2$, а третье — на $9\xi^5$.

Условия (7) при замене (8) переходят в условия

$$\rho(\tau, \xi)|_{\xi=0} = 1, \quad u(\tau, \xi)|_{\xi=0} = 0, \quad T(\tau, \xi)|_{\xi=0} = 0. \tag{10}$$

Решение задачи (9), (10) представляется в виде ряда по степеням ξ:

$$W(\tau, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(\tau) \frac{\xi^k}{k!}, \quad W_k(\tau) = \left. \frac{\partial^k W}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=0}, \tag{11}$$

где

$$W = (\rho, u, T).$$

Если в системе (9) положить $\xi = 0$ и учесть условия (10), то третье уравнение обратится в тождество, а первые два дадут соотношения

$$-a'(\tau)\rho_1 + u_1 = 0, \quad -a'(\tau) u_1 + \frac{1}{\gamma} T_1 = 0,$$

из которых после определения $T_1(\tau)$ однозначно находятся функции $\rho_1(\tau)$, $u_1(\tau)$. Если третье уравнение системы (9) продифференцировать по ξ, положить $\xi = 0$ и учесть условия (10), то получится тождество. Также получится тождество и после двукратного дифференцирования этого уравнения по ξ и подстановки $\xi = 0$ и условий (10). И только после третьего дифференцирования, подстановки $\xi = 0$ и условий (10) получается не тождество, а уравнение для $T_1(\tau)$:

$$-3a'(\tau) T_1 = \kappa_0 T_1^4.$$

У этого уравнения имеются два решения:

$$T_1(\tau) = 0,\ T_1(\tau) = -\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}.$$

Первое из этих решений приводит к равенствам $u_1(\tau) = 0, \quad \rho_1(\tau) = 0$. Построение всего ряда (11) в этом случае вызывает фоновое течение — холодный однородный покоящийся газ. Поэтому при $\xi = 0$, т. е. на фронте тепловой волны, к фоновому течению примыкает единственное, отличное от него, течение со следующими значениями выводящих производных:

$$T_1(\tau) = -\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}},\ u_1(\tau) = -\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0\,[a'(\tau)]^2}},\ \rho_1(\tau) = -\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0\,[a'(\tau)]^5}}.$$

Знак функции $a'(\tau)$ однозначно определяет направление движения фронта тепловой волны. Пусть $a'(\tau) > 0$, т. е. фронт движется слева направо в сторону увеличения x. Тогда выводящие производные газодинамических параметров имеют такие знаки: $\rho_1(\tau) < 0$, $u_1(\tau) < 0$, $T_1(\tau) < 0$. Отсюда следует, что за фронтом тепловой волны плотность, скорость и температура газа больше, чем перед фронтом, иначе говоря, рассматриваемое течение есть волна сжатия. Если $a'(\tau) < 0$, то $\rho_1(\tau) > 0,\ u_1(\tau) < 0,\ T_1(\tau) > 0$. Из этих неравенств следует, что и в случае распространения тепловой волны справа налево она также является волной сжатия.

Тепловой поток q с точностью до знака равен

$$q = \kappa_0 \frac{T^3}{\rho}\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa_0 \frac{T^3}{\rho}\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{12}$$

Если для функции $T(\tau, z)$ записать ее разложение в формальный ряд по степеням ξ (или, что то же самое, по степеням $\sqrt[3]{z}$)

$$T(\tau, z) = 0 + T_1(\tau)\sqrt[3]{z} + \frac{T_2(\tau)}{2!}(\sqrt[3]{z})^2 + ..., \tag{13}$$

почленно продифференцировать по z

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \left[T_1(\tau) + 2\sqrt[3]{z}\frac{T_2(\tau)}{2!} + ...\right]\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{z^2}} \tag{14}$$

и положить $z = 0$, то производная становится бесконечной. Однако при подстановке разложений (13), (14) в формулу (12) тепловой поток при $z \to 0$ будет стремиться к нулю:

$$q = \kappa_0 \frac{(\sqrt[3]{z})^3\left[T_1(\tau) + \sqrt[3]{z}\frac{T_2(\tau)}{2!} + ...\right]^3}{1 + \rho_1(\tau)\sqrt[3]{z} + ...}\frac{T_1(\tau) + 2\sqrt[3]{z}\frac{T_2(\tau)}{2!}}{3\sqrt[3]{z^2}} =$$
$$= \sqrt[3]{z}\kappa_0 \frac{T_1^4(\tau) + ...}{3\,[1 + \rho_1(\tau)\sqrt[3]{z} + ...]} \to 0.$$

Если коэффициенты $W_l(\tau),\ 0 \le l \le k$, известны и являются аналитическими функциями от τ, то для нахождения коэффициента $W_{k+1}(\tau),\ k \ge 1$, первые два уравнения необходимо продифференцировать по ξ k раз, третье — $k+1$ раз, положить $\xi = 0$ и подставить известные $W_l(\tau)$. В результате получается система, из которой однозначно определяются коэффициенты $T_{k+1}(\tau),\ u_{k+1}(\tau),\ \rho_{k+1}(\tau)$. Таким образом, формальный ряд, решающий задачу (9), (10), строится однозначно, и его коэффициенты являются аналитическими функциями от τ.

Для доказательства сходимости ряда (11) используется методика, предложенная в [9, 10], а именно делается переход к новым неизвестным функциям $R,\ U,\ \Theta$ по формулам

$$\rho = 1 + \xi R(\tau,\xi), \quad u = \xi U(\tau,\xi), \quad T = -\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}\xi + \xi^2\Theta(\tau,\xi), \tag{15}$$

т. е. при введении $R,\ U,\ \Theta$ учитываются условия (10) и найденный коэффициент $T_1(\tau)$. Если будет доказано, что R, U, Θ — аналитические функции от τ, ξ, то ρ, u, T — тоже аналитические и ряд (11) будет сходиться.

В результате замены (15) для R, U, Θ получается следующая система уравнений:

$$\begin{gathered} R + \xi R_\xi = f_{10}(\tau) + \xi f_{11}\left(\tau, U, R, \Theta, U_\tau, R_\tau, \Theta_\tau\right) + \\ + \xi^2 f_{12}\left(\tau, U, R, \Theta, U_\tau, R_\tau, \Theta_\tau, U_\xi, R_\xi, \Theta_\xi\right), \\ U + \xi U_\xi = f_{20}(\tau) + \xi f_{21}\left(\tau, U, R, \Theta, U_\tau, R_\tau, \Theta_\tau\right) + \\ + \xi^2 f_{22}\left(\tau, U, R, \Theta, U_\tau, R_\tau, \Theta_\tau, U_\xi, R_\xi, \Theta_\xi\right), \\ 24\Theta + 9\xi\Theta_\xi + 3\xi^2\Theta_{\xi\xi} = -3\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}\left[3R + \xi R_\xi\right] + \\ + \frac{3}{a'(\tau)}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}\left[\gamma U + (\gamma-1)\xi U_\xi\right] + \xi f_{31}\left(\tau, U, R, \Theta, U_\tau, R_\tau, \Theta_\tau\right) + \\ + \xi^2 f_{32}\left(\tau, U, R, \Theta, U_\tau, R_\tau, \Theta_\tau, U_\xi, R_\xi, \Theta_\xi\right), \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$f_{10}(\tau) = -\frac{1}{\gamma[a'(\tau)]^2}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}, \quad f_{20}(\tau) = -\frac{1}{\gamma a'(\tau)}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}},$$

а вид функций $f_{ij},\ i = 1,2,3;\ j = 1,2$, не приводится из-за громоздкости. Дополнительно отмечается, что в f_{ij} искомые функции и их производные входят полиномиально.

Решение системы (16) представляется в виде рядов

$$Z\left(\tau,\xi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k\left(\tau\right)\frac{\xi^k}{k!}, \quad Z_k\left(\tau\right) = \left.\frac{\partial^k Z}{\partial \xi^k}\right|_{\xi=0}, \quad Z = \left(R, U, \Theta\right), \tag{17}$$

коэффициенты которых последовательно определяются следующим образом. При $\xi = 0$ из первых двух уравнений определяются

$$R_0(\tau) = f_{10}(\tau), \quad U_0(\tau) = f_{20}(\tau),$$

после чего из третьего уравнения при $\xi = 0$ находится

$$\Theta_0(\tau) = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}R_0(\tau) + \frac{\gamma}{8a'(\tau)}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}U_0(\tau).$$

В предположении, что $a(\tau)$ — аналитическая функция в окрестности точки $\tau = 0$ и $a'(\tau) \neq 0$, найденные $R_0(\tau),\ U_0(\tau)\ \ \Theta_0(\tau)$ являются аналитическими функциями.

Для нахождения коэффициентов $U_1(\tau)$, $R_1(\tau)$, $\Theta_1(\tau)$ каждое уравнение системы один раз дифференцируется по ξ и полагается $\xi = 0$. Из первых двух полученных уравнений однозначно находятся

$$R_1(\tau) = \frac{1}{2} f_{11}(\tau, U_0, R_0, \Theta_0), \quad U_1(\tau) = \frac{1}{2} f_{21}(\tau, U_0, R_0, \Theta_0).$$

После этого с учетом найденных $R_1(\tau)$, $U_1(\tau)$ из третьего уравнения однозначно определяется

$$\Theta_1(\tau) = -\frac{4}{11}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}} R_1(\tau) + \frac{1}{11a'(\tau)}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}[\gamma U_1(\tau) + (\gamma-1)U_1(\tau)] + \\ + \frac{1}{33} f_{31}\left(\tau, U_0, R_0, \Theta_0\right).$$

Таким образом, коэффициенты Z_0, Z_1 формального ряда (17) определились однозначно.

Пусть при $k = 0, 1, 2, ..., (k-1)$ коэффициенты U_l, R_l, Θ_l, $0 \le l \le (k-1)$, известны. Для определения U_k, R_k, Θ_k каждое уравнение системы дифференцируется k раз по ξ, полагается $\xi = 0$ и учитываются найденные ранее коэффициенты. В результате получаются соотношения

$$R_k(\tau) + kR_k(\tau) = k \left.\frac{\partial^{k-1} f_{11}}{\partial \xi^{k-1}}\right|_{\xi=0} + \\ + \frac{k(k-1)}{2} \left.\frac{\partial^{k-2} f_{12}}{\partial \xi^{k-2}}\right|_{\xi=0} \equiv F_{1k}(\tau, U_0, R_0, \Theta_0, ..., U_{k-1}, R_{k-1}, \Theta_{k-1}),$$

$$U_k(\tau) + kU_k(\tau) = k \left.\frac{\partial^{k-1} f_{21}}{\partial \xi^{k-1}}\right|_{\xi=0} + \\ + \frac{k(k-1)}{2} \left.\frac{\partial^{k-2} f_{22}}{\partial \xi^{k-2}}\right|_{\xi=0} \equiv F_{2k}(\tau, U_0, R_0, \Theta_0, ..., U_{k-1}, R_{k-1}, \Theta_{k-1}),$$

$$24\Theta_k(\tau) + 9C_k^1\Theta_k(\tau) + 3C_k^2\Theta_k(\tau) = \\ = -3\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}\left[3R_k(\tau) + kR_k(\tau)\right] + \frac{3}{a'(\tau)}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}}\left[\gamma U_k + (\gamma-1)kU_k\right] + \\ + k \left.\frac{\partial^{k-1} f_{31}}{\partial \xi^{k-1}}\right|_{\xi=0} + \frac{k(k-1)}{2} \left.\frac{\partial^{k-2} f_{32}}{\partial \xi^{k-2}}\right|_{\xi=0} \equiv \\ \equiv F_{3k}(\tau, U_0, R_0, \Theta_0, ..., U_{k-1}, R_{k-1}, \Theta_{k-1}, U_k, R_k).$$

Из этих соотношений вначале однозначно определяются $R_k(\tau)$ и $U_k(\tau)$, поскольку в левых частях коэффициенты перед ними положительные. После этого однозначно находится $\Theta_k(\tau)$, так как $[24 + 9k + 3k(k-1)/2] > 0$.

Таким образом, по индукции доказано, что U_k, R_k, Θ_k определяются однозначно для любого $k = 0, 1, 2, ...$, следовательно, формальные ряды (17) с аналитическими коэффициентами U_k, R_k, Θ_k построены единственным образом.

Далее стандартным методом мажорант доказывается сходимость построенных формальных рядов (17). Рассматривается мажорантная задача

$$\begin{gathered}
\tilde{R}+\xi\tilde{R}_\xi=\tilde{f}_{10}(\tau)+\xi\tilde{f}_{11}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta}\right)+\xi^2\tilde{f}_{12}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{R}_\xi,\tilde{R}_\tau,\tilde{\Theta}_\xi\right),\\
\tilde{U}+\xi\tilde{U}_\xi=\tilde{f}_{20}(\tau)+\xi\tilde{f}_{21}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta}\right)+\xi^2\tilde{f}_{22}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{U}_\tau,\tilde{R}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right),\\
24\tilde{\Theta}+9\xi\tilde{\Theta}_\xi+3\xi^2\tilde{\Theta}_{\xi\xi}=\tilde{G}(\tau)\left[3(\tilde{R}+\xi\tilde{R}_\xi)\right]+\tilde{H}(\tau)\left[\gamma(\tilde{U}+\tilde{U}_\xi)\right]+\\
+\xi\tilde{f}_{31}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta}\right)+\xi^2\tilde{f}_{32}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{R}_\xi,\tilde{\Theta}_\tau,\tilde{\Theta}_\xi\right),
\end{gathered}$$

где

$$\tilde{G}(\tau)\gg 3\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}},\quad \tilde{H}(\tau)\gg\frac{3}{a'(\tau)}\sqrt[3]{\frac{3a'(\tau)}{\kappa_0}},$$

а функции $\tilde{f}_{ij}$ мажорируют соответственно функции f_{ij}: $\tilde{f}_{ij}\gg f_{ij}$. Тогда функции $\tilde{U}$, $\tilde{R}$, $\tilde{\Theta}$ будут мажорировать функции $U,\ R,\ \Theta$. Первое и второе уравнения позволяют исключить из третьего уравнения слагаемые $R+\xi R_\xi$ и $U+\xi U_\xi$, в результате уравнения для $R,\ U,\ \Theta$ запишутся в единообразном виде

$$\begin{gathered}
\tilde{R}+\xi\tilde{R}_\xi=\tilde{f}_{10}(\tau)+\xi\tilde{f}_{11}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{R}_\tau,\tilde{U}_\tau,\tilde{\Theta}_\tau\right)+\xi^2\tilde{f}_{12}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{R}_\tau,\tilde{U}_\tau,\tilde{\Theta}_\tau,\tilde{U}_\xi,\tilde{R}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right),\\
\tilde{U}+\xi\tilde{U}_\xi=\tilde{f}_{20}(\tau)+\xi\tilde{f}_{21}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{R}_\tau,\tilde{U}_\tau,\tilde{\Theta}_\tau\right)+\xi^2\tilde{f}_{22}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{R}_\tau,\tilde{U}_\tau,\tilde{\Theta}_\tau,\tilde{U}_\xi,\tilde{R}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right),\\
24\tilde{\Theta}+9\xi\tilde{\Theta}_\xi+3\xi^2\tilde{\Theta}_{\xi\xi}=\tilde{f}_{30}(\tau)+\xi\tilde{f}_{31}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{R}_\tau,\tilde{U}_\tau,\tilde{\Theta}_\tau\right)+\\
+\xi^2\tilde{f}_{32}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{R},\tilde{\Theta},\tilde{R}_\tau,\tilde{U}_\tau,\tilde{\Theta}_\tau,\tilde{U}_\xi,\tilde{R}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right).
\end{gathered}$$

Выбор общей мажоранты для $\tilde{f}_{1i}(\tau)$ и $\tilde{f}_{2i}(\tau),\ i=0,1,2$, позволяет сделать уравнения для R,U “одинаковыми”, и поэтому далее можно считать, что $\tilde{R}=\tilde{U}$.

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{gathered}
\tilde{U}+\xi\tilde{U}_\xi=\hat{f}_{10}(\tau)+\xi\hat{f}_{11}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta}\right)+\xi^2\hat{f}_{12}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right),\\
24\tilde{\Theta}+9\xi\tilde{\Theta}_\xi+3\xi^2\tilde{\Theta}_{\xi\xi}=\xi\tilde{f}_{31}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta}\right)+\xi^2\tilde{f}_{32}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right).
\end{gathered}$$

Каждое уравнение этой системы дифференцируется k раз, и полагается $\xi=0$. Получается система

$$\begin{gathered}
[k+1]\tilde{U}_k(\tau)=k\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}\hat{f}_{11}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta})\Big|_{\xi=0}+\\
+\frac{k(k-1)}{2}\ \frac{\partial^{k-2}}{\partial\xi^{k-2}}\hat{f}_{12}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right)\Big|_{\xi=0},\quad k\geq 1,\\
\left[24+9k+\frac{3k(k-1)}{2}\right]\tilde{\Theta}_k(\tau)=k\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}\tilde{f}_{31}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta})\Big|_{\xi=0}+\\
+\frac{k(k-1)}{2}\ \frac{\partial^{k-2}}{\partial\xi^{k-2}}\tilde{f}_{32}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right)\Big|_{\xi=0},\quad k\geq 2.
\end{gathered}\tag{18}$$

Пусть функция $\hat{f}_{40}(\tau)$ мажорирует функции $\tilde{f}_{10}(\tau)$ и$\tilde{f}_{30}(\tau)$, т. е.

$$\hat{f}_{40}(\tau)\gg\tilde{f}_{10}(\tau),\quad \hat{f}_{40}(\tau)\gg\tilde{f}_{30}(\tau).$$

Аналогично можно считать, что

$$\hat{f}_{41}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta}) \gg \tilde{f}_{11}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta}), \quad \hat{f}_{41}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta}) \gg \tilde{f}_{31}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta}),$$

$$\hat{f}_{42}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi) \gg \tilde{f}_{12}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi), \quad \hat{f}_{42}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi) \gg \tilde{f}_{32}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi).$$

Замена $\tilde{f}_{ij}$ на $\hat{f}_{ij}$ в соотношениях (18) сохранит свойство мажорирования $\tilde{U} \gg U$, $\tilde{\Theta} \gg \Theta$. Из уравнений (18) выражаются $\tilde{U}_k$, $\tilde{\Theta}_k$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{U}_k(\tau) = \frac{1}{k+1}\left[k\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}\hat{f}_{41}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta})\Big|_{\xi=0} + \right.\\
&\left. + \frac{k(k-1)}{2}\,\frac{\partial^{k-2}}{\partial\xi^{k-2}}\hat{f}_{42}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right)\Big|_{\xi=0}\right], \quad k=1,2,...,\\
&\tilde{\Theta}_k(\tau) = \frac{1}{24+9k+\dfrac{3k(k-1)}{2}}\left[k\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}\hat{f}_{41}(\tau,\tilde{U},\tilde{\Theta})\Big|_{\xi=0} + \right.\\
&\left. + \frac{k(k-1)}{2}\,\frac{\partial^{k-2}}{\partial\xi^{k-2}}\hat{f}_{42}\left(\tau,\tilde{U},\tilde{U}_\xi,\tilde{\Theta}_\xi\right)\Big|_{\xi=0}\right], \quad k=2,3,...
\end{aligned} \tag{19}$$

Можно заметить, что множитель $1/(k+1)$, стоящий в правой части уравнения для функции $\tilde{U}_k$, больше множителя $1/\left[24+9k+3k(k-1)/2\right]$, стоящего в правой части уравнения для функции $\tilde{\Theta}_k$. Поэтому функция $\tilde{\Theta}_k$ будет мажорироваться функцией $\tilde{U}_k$: $\tilde{U}_k \gg \tilde{\Theta}_k$. Следовательно, можно строить одно мажорантное уравнение для $\tilde{U}$.

Пусть $\Phi_0(\tau)$ задает начальные коэффициенты формальных рядов функций $\tilde{U}_0(\tau)$, $\tilde{\Theta}_0(\tau)$. Пусть для посчитанных коэффициентов $\tilde{U}_1(\tau)$, $\tilde{\Theta}_1(\tau)$ выбрана общая мажоранта $\Phi_1(\tau)$. Теперь, если в качестве $\Phi_0(\tau)$ взять общую мажоранту для $\tilde{U}_0(\tau)$, $\tilde{\Theta}_0(\tau)$, а в качестве $\Phi_1(\tau)$ — общую мажоранту для $\tilde{U}_1(\tau)$, $\tilde{\Theta}_1(\tau)$ и при всех $k \geq 2$ использовать формулу (19) для $\tilde{U}_k(\tau)$, в которой функция $\tilde{\Theta}$ заменена на $\tilde{U}$, то построенный таким образом формальный ряд будет мажорировать ряды для функций $\tilde{U}$, $\tilde{R}$, $\tilde{\Theta}$.

Если коэффициенты ряда для $\tilde{U}$ строить по формулам

$$\left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}\tilde{U}_\xi\right)\Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial\xi^{k-1}}\left[\hat{f}_{41}+\xi\hat{f}_{42}\right]\Big|_{\xi=0}, \quad k\geq 1, \tag{20}$$

то из сравнения соотношений (19) и (20) следует, что коэффициенты, построенные по формулам (20), будут мажорировать коэффициенты, построенные по формулам (19).

Построение коэффициентов ряда функции $\tilde{U}$ по формулам (20) эквивалентно решению следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \tilde{U}_\xi = \hat{f}_{41}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\tau) + \xi\hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi),\\ \tilde{U}(\tau,\xi)\Big|_{\xi=0} = \Phi_0(\tau). \end{cases} \tag{21}$$

Чтобы в задаче (21) получить дифференциальное уравнение в нормальной форме, оно дифференцируется по ξ и разрешается относительно старшей производной:

$$\tilde{U}_{\xi\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\hat{f}_{41}\left(\tau,\xi,\tilde{U}\right) + \frac{\partial \hat{f}_{41}(\tau,\xi,\tilde{U})}{\partial \tilde{U}}\tilde{U}_\xi + \frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \xi} +$$

$$+\xi\left[\frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \tilde{U}}\tilde{U}_\xi + \frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \tilde{U}_\xi}U_{\xi\xi}\right],$$

т. е.

$$\left[1 - \xi\frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \tilde{U}_\xi}\right]\tilde{U}_{\xi\xi} = \frac{\partial \hat{f}_{41}(\tau,\xi,\tilde{U})}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{f}_{41}(\tau,\xi,\tilde{U})}{\partial \tilde{U}}\tilde{U}_\xi +$$

$$+\frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \xi} + \xi\left[\frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{f}_{42}(\tau,\xi,\tilde{U},\tilde{U}_\xi)}{\partial \tilde{U}}\tilde{U}_\xi\right]. \qquad (22)$$

Для уравнения (22) имеют место аналитические начальные данные

$$\tilde{U}(\tau,\xi)\Big|_{\xi=0} = \Phi_0(\tau), \quad \tilde{U}_1(\tau,\xi)\Big|_{\xi=0} = \Phi_1(\tau). \qquad (23)$$

По теореме Ковалевской задача (22), (23) имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $\xi = 0$.

Сходимость ряда для функции $\tilde{U}(\tau,\xi)$ доказана. Это обеспечивает сходимость рядов для $\tilde{R}, \tilde{\Theta}$ и, следовательно, рядов для R, U, Θ. Тем самым доказана сходимость рядов (11).

Построенные сходящиеся ряды позволяют, в частности, "отступить" от фронта тепловой волны и далее строить решение численными методами. Аналогичным образом устанавливается существование цилиндрически и сферически симметричных тепловых волн, распространяющихся по холодному однородному покоящемуся газу при условии задания закона движения в окрестности точки, имеющей ненулевой радиус.

Список литературы

[1] Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.

[2] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

[3] Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. М.: Физматлит, 2004.

[4] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.

[5] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

[6] Баутин С.П., Чернышов Ю.Ю. Одно течение теплопроводного газа, аналогичное центрированной волне Римана // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 87–94.

[7] Забабахин Е.И., Симоненко В.А. Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 334–336.

[8] Баутин С.П., Садов А.П., Чернышов Ю.Ю. Особенности течений теплопроводного невязкого газа // Тез. междунар. конф. “Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике”. Новосибирск, 2005. С. 24–25.

[9] Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003.

[10] Баутин С.П. Представление решений системы Навье — Стокса с помощью характеристических рядов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд.-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 11–31.

Поступила в редакцию 29 ноября 2005 г.