СПЕЦИАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА*

В. М. Рябов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

e-mail: Riabov@VR1871.spb.edu

Methods for the Laplace transform inversion by means of quadrature formulas are described. Some quadrature formulas specially adjusted for recovering of a slowly changing inverse transform with approximation in the form $t^{s-1}P_{2n-1}(t^a)$, where $s > 0$, $0 < a < 1$, $P_{2n-1}(t)$ is polynomial and n is the number of formula's nodes are proposed.

Введение

Задача обращения интегрального преобразования Лапласа состоит в нахождении решения уравнения

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx,$$

в котором $F(p)$ — известное изображение; $f(x)$ — искомый оригинал. Для простоты будем считать, что функция $F(p)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > 0$, чего всегда можно добиться домножением оригинала на соответствующую экспоненту. Как правило, точное обращение осуществить не удается, и потому возникает необходимость разработки и применения приближенных методов. Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в [1]. В первую очередь следует назвать построение квадратурных формул для приближенного вычисления интеграла Римана — Меллина

$$f(t) = (L^{-1}F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \quad c > 0,$$

задающего обращение преобразования Лапласа.

Не существует универсального метода вычисления этого интеграла, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$. Любой метод обращения должен учитывать специфику поведения изображения (или функции-оригинала), что прежде всего находит отражение в выборе подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых могут быть хорошо приближены заданные образы и оригиналы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00984).

В настоящей работе построены новые квадратурные формулы наивысшей степени точности обращения преобразования Лапласа в предположении, что заданное изображение $F(p)$ фактически зависит от p^a, где a — произвольное положительное число. В случае $a = 1$ получаются известные формулы [1], в противном случае получаем новые формулы, обладающие бóльшей точностью по сравнению с известными для определенного класса изображений и имеющие большое прикладное значение.

1. Построение квадратурных формул обращения

Предположим, что при некотором $s > 0$ функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > 0$. Запишем формулу обращения Римана — Меллина в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p)\, dp = \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p} p^{-s} \varphi_s(p/t)\, dp\,. \tag{1}$$

Выберем произвольные попарно различные числа $p_1, \ldots, p_n$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > 0$ и построим интерполяционную квадратурную формулу (ИКФ) вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p} p^{-s} \varphi(p)\, dp \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi(p_k), \tag{2}$$

точную для функций $\varphi(p) = p^{-j}, j = 0, 1, \ldots, n-1$, что равносильно выполнению условий

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p_k^{-j} = \frac{1}{\Gamma(j+s)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Очевидно, система (3) однозначно разрешима.

Теперь потребуем, чтобы ИКФ вида (2) имела наивысшую степень точности $2n-1$, т. е. чтобы равенства (3) выполнялись для $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Этими условиями квадратурная формула наивысшей степени точности (КФНСТ) вида (2) определяется однозначно [1]: ее узлы p_k суть корни уравнения $P_n^{(s)}(1/p_k) = 0$, где

$$P_n^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k\, x^k,$$

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ a(a+1)\cdots(a+k-1), & k \geq 1. \end{cases}$$

Коэффициенты КФНСТ определяются из условия интерполяционности (3).

Применяя КФНСТ вида (2) для вычисления последнего интеграла в формуле (1), получаем КФНСТ обращения преобразования Лапласа

$$f(t) \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_s(p_k/t), \quad t > 0. \tag{4}$$

По построению она точна для функций $f(t) = t^{s-1+j}, j = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Итак, сначала находятся узлы КФНСТ из уравнения $P_n^{(s)}(1/p_k) = 0$, а затем определяются ее коэффициенты из системы (3).

Выбор в качестве s максимально возможного положительного числа, равного скорости убывания изображения на бесконечности, позволяет точно описать поведение оригинала при $t \to +0$, но при $t \to \infty$ приближенное решение никаким априорным условиям удовлетворять не будет.

Значения искомого оригинала $f(+0)$, $f(+\infty)$ в предположении их существования можно вычислить по формулам

$$f(+0) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p), \qquad f(+\infty) = \lim_{p\to 0} p\,F(p).$$

Квадратурная формула наибольшей степени точности (4) при $t \to 0$ и $t \to \infty$ приводит к верным результатам лишь для $s = 1$.

2. Построение обобщенных квадратурных формул

Описанные выше квадратурные формулы обращения обладают высокой степенью точности, если искомый оригинал хорошо приближается функциями вида $t^{s-1}Q_{2n-1}(t)$. Однако такое предположение не всегда справедливо.

Так, в задачах линейной вязкоупругости [2], описывающих напряженное состояние на основе определяющего соотношения Больцмана — Вольтерра (пространственные координаты для простоты опущены)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left(\sigma(t) + \beta\int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau\right), \tag{5}$$

сравнительно просто находятся изображения по Лапласу решений (деформаций $\varepsilon(t)$ и напряжений $\sigma(t)$) из соответствующих интегральных уравнений вида (5). Сами решения медленно изменяются во времени и допускают хорошие приближения вида $t^{s-1}Q(t^a)$ при $0 < a < 1$, где $Q(t)$ — некоторый многочлен. Такая ситуация характерна для длительных процессов деформирования [2, 3]. Изображения таких функций имеют вид $p^{-s}R(p^{-a})$, где $R(x)$ — многочлен той же степени, что и $Q(x)$.

Формально для обращения изображений такого вида можно использовать вышеописанные формулы обращения наивысшей степени точности, полагая, что $a \approx 1$.

Ядро K должно иметь интегрируемую особенность в точке $t = 0$ [2]. Чаще всего в качестве такового берут дробно-экспоненциальную функцию Работнова [2]

$$Э_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^k}{\Gamma((1+\alpha)(1+k))}, \qquad -1 < \alpha \le 0. \tag{6}$$

Способ определения параметров дробно-экспоненциальной функции по измеренной функции ползучести описан в работе [3].

Интеграл от этого ядра по полуоси $t \ge 0$ должен быть конечным, для чего необходимо $\beta < 0$. Не умаляя общности, далее считаем, что $\beta = -1$, и пусть символ $Э_\alpha(t)$ означает $Э_\alpha(-1, t)$.

В наследственной механике твердого тела наряду с функцией (6) широко используется и интеграл от нее с переменным верхним пределом [2, 4]. Для облегчения использования этих величин составлены таблицы функций [2, 4]

$$F_1(\alpha, x) = t^{-\alpha}Э_\alpha(t), \quad F_2(\alpha, x) = t^{-\alpha-1}\int\limits_0^t Э_\alpha(\tau)\,d\tau, \quad x = t^{\alpha+1}.$$

Однако при решении конкретных задач необходимо в память вычислительной машины вводить части этих таблиц, соответствующие найденным параметрам $Э_\alpha$ — функций, которые к тому же заранее не известны и определяются в процессе решения задачи (и в итоге таковых в таблице может не оказаться). При изменении параметров приходится эту работу проделывать заново, что неудобно и сопряжено с внесением ошибок.

Изображения по Лапласу функции $Э_\alpha(t)$ и интеграла от нее равны соответственно

$$\frac{1}{p^a+1}, \qquad \frac{1}{p(p^a+1)}, \qquad a = 1+\alpha.$$

Применение вышеописанных КФНСТ для обращения таких изображений будет давать хорошие результаты для значений параметра a, близких к единице, однако при уменьшении a погрешность метода будет возрастать.

Для устранения этого недостатка следует использовать обобщенные квадратурные формулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ) вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}\varphi(p)\,dp \approx \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi(p_k), \tag{7}$$

точные для функций $\varphi(p) = p^{-aj}$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, или для оригиналов вида $t^{s-1}Q_{2n-1}(t^a)$.

Такие формулы введены в работе [5] и подробно исследованы в статье [6].

В статье [6] доказана

Теорема 1. *Для того чтобы формула (7) была точна для функций* $\varphi(p) = p^{-aj}$, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, *необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

— *формула (7) — интерполяционная;*

— *построенный по узлам формулы (7) многочлен*

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(x - p_k^{-a}\right)$$

удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s}\omega_n(p^{-a})p^{-am}\,dp = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказано [6], что такой многочлен существует и определяется однозначно, а его корни, т. е. узлы ОКФНСТ, удовлетворяют неравенствам $\mathrm{Re}\,(p_k^{\,a}) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Отметим, что узлы и коэффициенты формулы (7) суть комплексные числа. Эти формулы оказались весьма эффективными при решении задач линейной вязкоупругости [3].

Другой способ построения приближенных методов обращения преобразования Лапласа состоит в деформации контура интегрирования в формуле обращения при некоторых предположениях о поведении изображения.

Приведенные выше преобразования Лапласа функции $Э_\alpha(t)$ и интеграла от нее не имеют особенностей на комплексной плоскости $C \setminus R_-$ с разрезом вдоль полупрямой

$$R_- = \{p \in C \ : \ \mathrm{Im}(p) = 0, \ \mathrm{Re}(p) \le 0\}.$$

Наши изображения $F(p)$ фактически зависят от p^a, т.е. $F(p) = \Phi_1(p^a)$.

Введем в рассмотрение функции

$$F^{\pm}(t) = \Phi_1(t^a \exp(\pm ia\pi)), \quad t > 0.$$

Очевидно, $F^+(t) = \overline{F^-(t)}$ в силу вещественности функции-оригинала.

Воспользуемся полученным в работе [7] следующим результатом.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

(А) $F(p) = o(1)$ *при* $|p| \to \infty$, $F(p) = o(|p|^{-1})$ *при* $|p| \to 0$ *равномерно в любом секторе* $|\arg p| < \pi - \eta$, $\pi > \eta > 0$;

(Б) *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любого* φ, *удовлетворяющего неравенству* $\pi - \varepsilon < \varphi \le \pi$, *справедливы соотношения*

$$\frac{F(r\exp(\pm i\varphi))}{1+r} \in L_1(R_+), \quad |F(r\exp(\pm i\varphi))| \le \alpha(r),$$

где $\alpha(r)$ *не зависит от* φ *и* $\alpha(r)\exp(-\delta r) \in L_1(R_+)$ *для любого* $\delta > 0$. *Тогда*

$$f(x) = (L^{-1}F)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-xt}\mathrm{Im}\, F^-(t)\, dt. \tag{8}$$

Пусть $F(p) = 1/(p^a + 1)$, тогда

$$\mathrm{Im}\, F^-(t) = \mathrm{Im}\frac{1}{t^a\exp(-i\pi a) + 1} = \frac{t^a \sin\pi a}{1 + 2t^a\cos\pi a + t^{2a}},$$

так что выполнены все условия теоремы 2 и формула (8) дает

$$\begin{aligned} Э_\alpha(x) &= \frac{\sin\pi a}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-xt}\frac{t^a\, dt}{1 + 2t^a\cos\pi a + t^{2a}} = \\ &= x^{a-1}\frac{\sin\pi a}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{z^a e^{-z}\, dz}{z^{2a} + 2z^a x^a\cos\pi a + x^{2a}}. \end{aligned} \tag{9}$$

При $x \to 0$ последний интеграл в (9) стремится к величине $\Gamma(1-a)$, и с учетом формулы $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi/\sin\pi a$ при $x \to 0$ из представления (9) получаем $Э_\alpha(x) \approx x^{a-1}/\Gamma(a)$, что совпадает с первым членом ряда (6).

Положим

$$g_a(x) = \int\limits_0^x Э_\alpha(t)\, dt. \tag{10}$$

Изображение этой функции равно

$$G_a(p) = \frac{1}{p(p^a + 1)}.$$

Для нее не выполняется условие (А) теоремы 2 (при $p \to 0$ величина $|G_a(p)|$ слишком быстро возрастает).

Представим $G_a(p)$ в виде

$$G_a(p) = \frac{1}{p} - \frac{p^{a-1}}{p^a + 1} \tag{11}$$

и положим

$$Q_a(p) = \frac{p^{a-1}}{p^a + 1}. \tag{12}$$

Обозначим через $q_a(x)$ функцию-оригинал с изображением (12). Формула (11) означает, что $g_a(x) = 1 - q_a(x)$.

Изображение (12) удовлетворяет условиям теоремы 2, для него находим

$$\operatorname{Im} F^-(t) = \operatorname{Im} \frac{t^{a-1}\exp(-i\pi(a-1))}{t^a \exp(-i\pi a) + 1} = \frac{t^{a-1}\sin \pi a}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} q_a(x) &= \frac{\sin \pi a}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-xt} \frac{t^{a-1}\,dt}{1 + 2t^a \cos \pi a + t^{2a}} = \\ &= x^a \frac{\sin \pi a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{z^{a-1} e^{-z}\,dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Из определения (10) находим $g_a(0) = 0$, поэтому необходимо $q_a(0) = 1$. Подставив $x = 0$ в первый интеграл в представлении (13) и сделав замену $t^a = z$, придем к табличному легко вычисляемому интегралу и таким образом убедимся в справедливости равенства $q_a(0) = 1$ при всех $a > 0$.

Итак, наши задачи обращения преобразования Лапласа свелись к вычислению интегралов

$$Э_\alpha(x) = x^{a-1} \frac{\sin \pi a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{z^a e^{-z}\,dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}; \tag{14}$$

$$q_a(x) = x^a \frac{\sin \pi a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{z^{a-1} e^{-z}\,dz}{z^{2a} + 2z^a x^a \cos \pi a + x^{2a}}. \tag{15}$$

Для их приближенного вычисления можно применить квадратурные формулы типа Гаусса [8] с весом Лагерра $z^a e^{-z}$ для первого интеграла и с весом $z^{a-1} e^{-z}$ для второго интеграла. Однако, как отмечалось выше, с уменьшением a точность формул будет уменьшаться. Поэтому для приближенного вычисления интегралов (14) и (15) построим обобщенные квадратурные формулы вида

$$\int\limits_0^\infty z^\beta e^{-z} f(z)\,dz \approx \sum_{k=1}^n A_k f(z_k), \quad \beta > -1, \tag{16}$$

точные для функций $f(z)=z^{am}$, $m=0,1\dots,2n-1$.

Теорема 3. *Для того чтобы формула (16) была точна для функций* $f(z)=z^{am}$, $m=0,1\dots,2n-1$, *необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

— формула (16) — интерполяционная;

— построенный по узлам формулы (16) многочлен

$$\omega_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k^a) \tag{17}$$

удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^\infty z^\beta e^{-z}\omega_n(z^a)z^{am}\,dz=0,\quad m=0,1,\dots,n-1. \tag{18}$$

Доказательство этой теоремы проводится точно так же, как в случае классических формул типа Гаусса [8], и мы не будем его здесь повторять.

Покажем, что многочлен (17), удовлетворяющий условиям (18), существует и определяется однозначно.

После замены переменной $z^a=x$ условия (18) принимают вид

$$\int\limits_0^\infty x^{(\beta+1)/a-1}\exp(-x^{1/a})\,\omega_n(x)\,x^m\,dx=0,\quad m=0,1,\dots,n-1.$$

Функция $w(x)=x^{(\beta+1)/a-1}\exp(-x^{1/a})$ обладает свойствами веса на полуоси $(0,\infty)$, поскольку $(\beta+1)/a>0$, следовательно, искомый многочлен существует и единствен, а его корни, т.е. z_k^a, $k=1,2,\dots,n$, попарно различны и положительны. Все коэффициенты формулы положительны. Итак, квадратурная формула типа Гаусса вида (16) существует.

Опишем способ вычисления узлов и коэффициентов формулы (16).

Будем искать многочлен (17) в виде

$$\omega_n(z)=z^n+b_1z^{n-1}+\dots+b_n$$

с неизвестными коэффициентами b_k.

Условия (18) приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\Gamma(\beta+(k+n-j)a+1)\,b_j=-\Gamma(\beta+(k+n)a+1),\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

Ее решение существует и единственно, как показано выше. Далее находим корни уравнения $\omega_n(z)=0$, т.е. числа z_k^a, $k=1,2,\dots,n$. Коэффициенты формулы (16) определяем из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}A_k\,(z_k^a)^{j-1}=\Gamma(\beta+(j-1)\,a+1),\quad j=1,2,\dots,n.$$

Заметим, что в отличие от ОКФНСТ (2) узлы и коэффициенты формулы (16) вещественны.

Были проведены численные эксперименты по вычислению функций (14) и (15), для чего использовался математический пакет MAPLE, позволяющий проводить вычисления с указанным в параметре Digits пакета количеством десятичных знаков. Найденные с помощью формулы (16) с пятнадцатью узлами при Digits=50 значения этих функций практически совпали с приведенными в книге [2] результатами.

Замечание 1. Описанная схема построения специальных квадратурных формул обращения преобразования Лапласа пригодна и для более общих изображений, изученных в работе [3].

Замечание 2. Параметр a может принимать любые положительные нецелые значения. Малые a характерны для изображений, описывающих медленно протекающие процессы.

Список литературы

[1] Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.

[2] Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

[3] Екельчик В.С., Рябов В.М. Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости // Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 393–404.

[4] Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Звонов Е.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М.: Наука, 1969. 132 с.

[5] Рябов В.М. О многочленах, возникающих при численном обращении преобразования Лапласа // Методы вычислений. Вып. 12. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1981. С. 46–53.

[6] Рябов В.М. Свойства квадратурных формул наивысшей степени точности, применяемых для обращения преобразования Лапласа // Журн. вычисл. математатики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 7. С. 1083–1087.

[7] Bobylev A.V., Cercignani G. The inverse Laplace transform of some analytic functions with an application to the eternal solutions of the Boltzmann equation // Appl. Math. Lett. 2002. Vol. 15. P. 807–813.

[8] Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 1998. 472 с.

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.