# УСЛОВИЯ ДИССИПАТИВНОСТИ И $M$-МАТРИЧНОСТИ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА*

Л. Г. Чикина, И. Н. Шабас
*ЮГИНФО Ростовского государственного университета, Ростов-на-Дону, Россия*
e-mail: `lchikina@rsu.ru, shabas@rsu.ru`

Positiveness of the real part and $M$-matrix property conditions for the convection — diffusion difference operator with boundary conditions of the third type are obtained. Positiveness of the real part and $M$-matrix properties depend on the central or upwind approximation of the convective terms and on the specific representation of these terms in the symmetric or nondivergent form.

## 1. Постановка задачи

В области $\bar{\Omega} \times T$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, рассматривается система трехмерных уравнений, описывающая процессы переноса вещества в несжимаемой среде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_i \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) + \gamma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i S) + (1-\gamma)\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial S}{\partial x_i} + \beta S = f, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\bar{\mathbf{v}} = 0, \tag{2}$$

где $\Omega = \{\mathbf{x} = (x, y, z)\}$ — трехмерная область расчета (акватория водоема); $S$ — концентрация вещества; $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ — коэффициенты турбулентной диффузии вещества; $v_1, v_2, v_3$ — скорости движения среды по направлениям $x$, $y$ и $z$ соответственно; $\bar{\mathbf{v}} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости; $\beta = \beta(x, y, z, t) > 0$ описывает консервативность рассматриваемого вещества; $\gamma \in [0, 1]$ — параметр записи уравнения (1). Условие несжимаемости среды (2) позволяет записать систему (1) в недивергентном виде ($\gamma = 1$), в дивергентном виде ($\gamma = 0$) и в эквивалентной симметричной форме ($\gamma = 1/2$).

Система (1) замыкается начальными

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 03-01-00005 и № 05-01-00096-а), а также Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Ростовской области (№ 04-01-96807) и программы Университеты России (УР.03.01.024).

и краевыми условиями

$$\mu(\mathbf{x})\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \bar{n}} + \chi(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{4}$$

где $\mu(\mathbf{x}), \chi(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$ — кусочно-гладкие функции. В зависимости от равенства нулю функций $\mu(\mathbf{x}), \chi(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$ допускается возможность постановки условий 1, 2 и 3-го рода.

## 2. Разностная аппроксимация

В области $\bar{\Omega}$ вводится равномерная по всем направлениям разностная сетка $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ с векторным параметром $h = (h_x, h_y, h_z)$, где $h_x, h_y, h_z$– соответствующие шаги сетки. Здесь $\Omega_h$ — множество внутренних узлов сетки; $\Gamma_h$ — множество граничных узлов.

При аппроксимации системы необходимо сохранить свойства исходных дифференциальных операторов. Поэтому при пространственной аппроксимации уравнений системы (1), конвективная часть которых записана в симметричной форме, выбрана центрально-разностная схема, а при недивергентной записи конвективных членов – противопотоковая схема.

При аппроксимации первых производных в граничных условиях используются правые либо левые разности в зависимости от того, какая граница рассматривается [1].

Рассмотрим, например, разностный аналог на семиточечном шаблоне на оси $WE$ (рис. 1) краевых условий 3-го рода. Он выглядит следующим образом:

$$-\mu_W \frac{s_{1jk} - s_{0jk}}{h_x} + \chi_W s_{0jk} = r_W,$$
$$\mu_E \frac{s_{Njk} - s_{N-1jk}}{h_x} + \chi_E s_{Njk} = r_E,$$

преобразованный вид этих условий следующий:

$$\frac{(\mu_W + \chi_W h_x)}{h_x} s_{0jk} - \frac{\mu_W}{h_x} s_{1jk} = r_W,$$
$$\frac{(\mu_E + \chi_E h_x)}{h_x} s_{Njk} - \frac{\mu_E}{h_x} s_{N-1jk} = r_E.$$

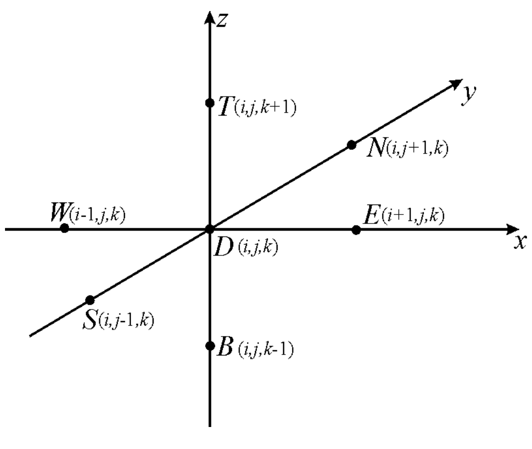


Рис. 1. Семиточечный шаблон.

Таким образом, в общем виде аппроксимация 3-го граничного условия будет иметь вид

$$g_\Theta \breve{s} + p_\Theta \widehat{s} = r_\Theta,$$

где $\breve{s}$, $\widehat{s}$ — значения концентрации вещества соответственно в некотором граничном и приграничном узле. Для коэффициентов $g_\Theta, p_\Theta, r_\Theta$ справедливо

$$g_\Theta = \frac{(\mu_\Theta + \chi_\Theta h_\alpha)}{h_\alpha},$$

$$p_\Theta = -\frac{\mu_\Theta}{h_\alpha}, \quad r_\Theta = r_\Theta,$$

где $\Theta$ заменяется на символы $W, S, B, T, N, E$, если граница области приходится соответственно на $(i-1), (j-1), (k-1), (k+1), (j+1), (i+1)$-й узел семиточечного шаблона, $\alpha = x, y, z$.

В результате задаче (1), (3), (4) поставлен в соответствие дифференциально-разностный аналог

$$\begin{gathered} \frac{\partial s_h}{\partial t} + L_h s_h = f_h(x,t), \quad x,t \in \Omega_h \times \Omega_t, \\ g_\Theta \breve{s} + p_\Theta \widehat{s} = r_\Theta, \quad x,t \in \Gamma_h \times \bar{\Omega}_t, \\ s_h = u_h^0(x,0), \quad x,t \in \bar{\Omega}_h \times \{0\}, \\ \bar{\Omega}_t = \Omega_t \cup \{0\}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $L_h = L_{Dh} + L_{Ch} + L_{\beta h}$, $L_{Dh}$ — разностный оператор диффузионного переноса; $L_{Ch}$ — разностный оператор конвективного переноса; $L_{\beta h}$ — разностный аналог функции взаимодействия веществ.

Исключив решение в граничных точках области $\bar{\Omega}_h$ и учитывая разностные краевые условия, перейдем к неявной операторно-разностной схеме:

$$\frac{s_h^{n+1} - s_h^n}{\tau} + \bar{L}_h(s_h^n) s_h^{n+1} = f_h^n, \quad s_h^0 = u^0, \quad n \geq 0. \tag{6}$$

Здесь $\bar{L}_h$ — это оператор $L_h$, в который уже включены граничные условия.

Свойства разностного оператора конвекции-диффузии зависят от того, какими разностями — центральными или противопотоковыми — будут аппроксимированы конвективные слагаемые в уравнении конвекции-диффузии. Поэтому нам необходимы соответственно достаточные условия положительной определенности и $M$-матричности.

**Теорема 1. (Тaусски)** *(достаточное условие положительной определенности) [2, 3]. Пусть симметричная матрица $A \in M_n$:*

*1) неразложима;*

*2) матрица с диагональным преобладанием, т. е.*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|;$$

*3) матрица, у которой хотя бы для одного $i$*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|;$$

*4) матрица, все диагональные элементы которой положительны*

$$a_{ii} > 0, \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

*Тогда все собственные значения матрицы $A$ строго положительны.*

Существует несколько эквивалентных определений $M$-матричности. Для наших исследований необходимо следующее

**Определение 1.** *Невырожденная матрица $A$ называется $M$-матрицей, если ее внедиагональные элементы неположительны, а обратная матрица поэлементно неотрицательна [4].*

**Теорема 2.** *Пусть матрица $A \in M_n$ и*

$$a_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \qquad a_{ii} > 0, \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

*имеет строгое диагональное преобладание или же $A$ является неразложимой и имеет диагональное преобладание. Тогда матрица $A$ является $M$-матрицей [3].*

В случае граничных условий 1-го рода центрально-разностная пространственная аппроксимация приводит к диссипативному разностному оператору, а противопотоковая аппроксимация обеспечивает ему свойство $M$-матричности. Наличие граничных условий 3-го рода может нарушать эти свойства операторов.

# 3. Диссипативность рассматриваемого разностного оператора

**Определение 2.** *Невырожденная матрица $A$ называется диссипативной, если ее реальная часть $A_0 = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ положительно определена [1].*

Для разностных операторов $\bar{L}_h^c$, получаемых в результате пространственной аппроксимации уравнений системы (1) при центрально-разностной аппроксимации конвективных членов в уравнении конвекции-диффузии (1), (2) с $\gamma = 1/2$ при наличии граничных условий 3-го рода и постоянного коэффициента консервативности рассматриваемого вещества, доказано достаточное условие диссипативности рассматриваемого разностного оператора.

**Теорема 3.** *Пусть в уравнении конвекции-диффузии (1), (2), записанном в симметричной форме ($\gamma = 1/2$), с краевыми условиями 3-го рода (5) и $\beta = \beta(x, y, z, t) > 0$ конвективные члены аппроксимируются центральными разностями.*

*Тогда для того чтобы оператор $\bar{L}_h^c$ — разностный аналог стационарной задачи конвекции-диффузии — был диссипативной матрицей, достаточно выполнение неравенств*

$$\beta_{ijk} - \sum_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1 + \frac{p_\Theta}{g_\Theta}\right) \Theta^c_{(0)ijk} \geq 0, \tag{7}$$

$$i = 1, ..., N_x - 1, \quad j = 1, ..., N_y - 1, \quad k = 1, ..., N_z - 1,$$

*где хотя бы одно из них является строгим. Здесь $\Theta^c_{(0)ijk}$ — элементы матрицы $A_0^c$, симметричной составляющей оператора $\bar{L}_h^c$ в (6) в приграничном узле для соответствующей границы; $\delta_\Theta$ — символ Кронекера для соответствующей границы; $g_\Theta, p_\Theta$ — коэффициенты из (5), $g_\Theta \neq 0$.*

**Доказательство.** Оператор $\bar{L}_h^c = \bar{L}_{Dh} + L_{Ch}^c + L_{\beta h}$, полученный в результате включения в него граничных условий 3-го рода, сохранил кососимметричность оператора $L_{Ch}^c$. Так как вклады граничных условий 3-го рода вошли в диагональ оператора $\bar{L}_{Dh}$, нам достаточно найти условия диссипативности оператора $L_{Ch}^c + L_{\beta h}$. Оператору $\bar{L}_h^c$ соответствует матрица $A^c = A_0^c + A_1^c$, где кососимметрическая составляющая $A_1^c = L_{Ch}^c$, а симметричная составляющая $A_0^c = \bar{L}_{Dh} + L_{\beta h}$. Матрица $A_0^c$ является неразложимой [3, 5]. Так как матрица $A_0^c$ является неразложимой, по теореме 1 достаточно найти условия, при которых матрица $A_0^c$ имеет диагональное преобладание, а ее диагональные элементы будут положительными:

$$\begin{cases} |a_{ii}| \geq \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|, \\ a_{ii} > 0. \end{cases}$$

Сумма норм — это неотрицательная величина, поэтому достаточно найти условия выполнения неравенства

$$\begin{cases} a_{ii} \geq \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|, \\ a_{ii} \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Эти условия обеспечат положительность диагональных элементов.

Симметричная матрица $A_0^c$ имеет вид

$$A_0^c = \begin{pmatrix} D_1 & E_1 & 0 & ... & 0 \\ W_2 & D_2 & E_2 & ... & ... \\ 0 & W_3 & D_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & E_{N_x-2} \\ 0 & ... & 0 & W_{N_x-1} & D_{N_x-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $W_i, D_i, E_i$ — матрицы размером $(N_y - 1) \times (N_y - 1)$:

$$W_i = \begin{pmatrix} W_{i1} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & W_{iN_y-1} \end{pmatrix},$$

$$E_i = \begin{pmatrix} E_{i1} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & E_{iN_y-1} \end{pmatrix},$$

$$D_i = \begin{pmatrix} D_{i1} & N_{i1} & 0 & ... & 0 \\ S_{i2} & D_{i2} & N_{i2} & ... & ... \\ 0 & S_{i3} & D_{i3} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & N_{iN_y-2} \\ 0 & ... & 0 & S_{iN_y-1} & D_{iN_y-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $W_{ij}, S_{ij}, D_{ij}, N_{ij}, E_{ij}$ — матрицы размером $(N_z - 1) \times (N_z - 1)$.

Распишем поэлементно матрицы $D_i, W_i, E_i$:

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} D_{ij1}^c & T_{ij1}^c & 0 & ... & 0 \\ B_{ij2}^c & D_{ij2}^c & T_{ij2}^c & ... & ... \\ 0 & B_{ij3}^c & D_{ij3}^c & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & T_{ijN_z-2}^c \\ 0 & ... & 0 & B_{ijN_z-1}^c & D_{ijN_z-1}^c \end{pmatrix},$$

$$S_{ij} = \left( \begin{array}{cccc} S^c_{ij1} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & S^c_{ijN_z-1} \end{array} \right),$$

$$N_{ij} = \left( \begin{array}{cccc} N^c_{ij1} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & N^c_{ijN_z-1} \end{array} \right),$$

$$W_{ij} = \left( \begin{array}{cccc} W^c_{ij1} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & W^c_{ijN_z-1} \end{array} \right),$$

$$E_{ij} = \left( \begin{array}{cccc} E^c_{ij1} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & E^c_{ijN_z-1} \end{array} \right).$$

Коэффициенты матрицы $A^c_0$ для внутренних точек области имеют следующие значения:

— элементы первой, второй и третьей поддиагоналей соответственно

$$W^{c_0}_{(0)ijk} = -\frac{a^x_{ijk}}{h^2_x}, \quad S^{c_0}_{(0)ijk} = -\frac{a^y_{ijk}}{h^2_y}, \quad B^{c_0}_{(0)ijk} = -\frac{a^z_{ijk}}{h^2_z};$$

— диагональные элементы (без вкладов граничных условий)

$$D^{c_0}_{(0)ijk} = \frac{a^x_{i+1jk} + a^x_{ijk}}{h^2_x} + \frac{a^y_{ij+1k} + a^y_{ijk}}{h^2_y} + \frac{a^z_{ijk+1} + a^z_{ijk}}{h^2_z} + \beta_{ijk}; \qquad (10)$$

— элементы первой, второй и третьей наддиагоналей соответственно

$$T^{c_0}_{(0)ijk} = -\frac{a^z_{ijk+1}}{h^2_z}, \quad N^{c_0}_{(0)ijk} = -\frac{a^y_{ij+1k}}{h^2_y}, \quad E^{c_0}_{(0)ijk} = -\frac{a^x_{i+1jk}}{h^2_x}.$$

В этих обозначениях $\bar{L}_h s$ из (6) будет иметь вид

$$\bar{L}_h s = W^{c_0}_{ijk} s_{i-1jk} + S^{c_0}_{ijk} s_{ij-1k} + B^{c_0}_{ijk} s_{ijk-1} + D^{c_0}_{ijk} s_{ijk} + \\ + T^{c_0}_{ijk} s_{ijk+1} + N^{c_0}_{ijk} s_{ij+1k} + E^{c_0}_{ijk} s_{i+1jk},$$

где

$$W^{c_0}_{ijk} = (1-\delta_{W}) W^{c_0}_{(0)ijk}; \quad S^{c_0}_{ijk} = (1-\delta_{S}) S^{c_0}_{(0)ijk}; \quad B^{c_0}_{ijk} = (1-\delta_{B}) B^{c_0}_{(0)ijk};$$

$$T^{c_0}_{ijk} = (1-\delta_{T}) T^{c_0}_{(0)ijk}; \quad N^{c_0}_{ijk} = (1-\delta_{N}) N^{c_0}_{(0)ijk}; \quad E^{c_0}_{ijk} = (1-\delta_{E}) E^{c_0}_{(0)ijk},$$

$$D^{c_0}_{ijk} = D^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{W} \frac{p_{W}}{g_{W}} W^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{S} \frac{p_{S}}{g_{S}} S^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{B} \frac{p_{B}}{g_{B}} B^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{T} \frac{p_{T}}{g_{T}} T^{c_0}_{(0)ijk} - \\ - \delta_{N} \frac{p_{N}}{g_{N}} N^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{E} \frac{p_{E}}{g_{E}} E^{c_0}_{(0)ijk}.$$

Для выполнения (8) необходимо, чтобы

$$\begin{gathered}D^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{W}\frac{p_W}{g_W}W^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{S}\frac{p_S}{g_S}S^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{B}\frac{p_B}{g_B}B^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{T}\frac{p_T}{g_T}T^{c_0}_{(0)ijk} - \\ -\delta_{N}\frac{p_N}{g_N}N^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{E}\frac{p_E}{g_E}E^{c_0}_{(0)ijk} \geq \left|(1-\delta_{W})W^{c_0}_{(0)ijk}\right| + \left|(1-\delta_{S})S^{c_0}_{(0)ijk}\right| + \\ + \left|(1-\delta_{B})B^{c_0}_{(0)ijk}\right| + \left|(1-\delta_{T})T^{c_0}_{(0)ijk}\right| + \left|(1-\delta_{N})N^{c_0}_{(0)ijk}\right| + \left|(1-\delta_{E})E^{c_0}_{(0)ijk}\right|.\end{gathered}$$

Так как $W^{c_0}_{(0)ijk}, S^{c_0}_{(0)ijk}, B^{c_0}_{(0)ijk}, T^{c_0}_{(0)ijk}, N^{c_0}_{(0)ijk}, E^{c_0}_{(0)ijk}$ являются отрицательными величинами по построению, а $(1-\delta_\Theta) \geq 0$ по определению символа Кронекера и значения $(1-\delta_\Theta)\Theta^{c_0}_{(0)ijk}$ являются неположительными,

$$|(1-\delta_\Theta)\Theta^{c_0}_{(0)ijk}| = -(1-\delta_\Theta)\Theta^{c_0}_{(0)ijk}$$

и неравенство (8) в нашем случае имеет вид

$$\begin{gathered}D^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{W}\frac{p_W}{g_W}W^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{S}\frac{p_S}{g_S}S^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{B}\frac{p_B}{g_B}B^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{T}\frac{p_T}{g_T}T^{c_0}_{(0)ijk} - \\ -\delta_{N}\frac{p_N}{g_N}N^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{E}\frac{p_E}{g_E}E^{c_0}_{(0)ijk} \geq -(1-\delta_{W})W^{c_0}_{(0)ijk} - (1-\delta_{S})S^{c_0}_{(0)ijk} - \\ -(1-\delta_{B})B^{c_0}_{(0)ijk} - (1-\delta_{T})T^{c_0}_{(0)ijk} - (1-\delta_{N})N^{c_0}_{(0)ijk} - (1-\delta_{E})E^{c_0}_{(0)ijk}.\end{gathered} \tag{11}$$

Из (10) видно, что диагональные элементы без вкладов граничных условий можно записать в виде

$$D^{c_0}_{(0)ijk} = -W^{c_0}_{(0)ijk} - S^{c_0}_{(0)ijk} - B^{c_0}_{(0)ijk} - T^{c_0}_{(0)ijk} - N^{c_0}_{(0)ijk} - E^{c_0}_{(0)ijk} + \beta_{ijk}.$$

Тогда после приведения подобных предыдущее неравенство (11) примет вид

$$\begin{gathered}\left(1-\delta_{W}-1-\delta_{W}\frac{p_W}{g_W}\right)W^{c_0}_{(0)ijk} + \left(1-\delta_{S}-1-\delta_{S}\frac{p_S}{g_S}\right)S^{c_0}_{(0)ijk} + \\ + \left(1-\delta_{B}-1-\delta_{B}\frac{p_B}{g_B}\right)B^{c_0}_{(0)ijk} + \left(1-\delta_{T}-1-\delta_{T}\frac{p_T}{g_T}\right)T^{c_0}_{(0)ijk} + \\ + \left(1-\delta_{N}-1-\delta_{N}\frac{p_N}{g_N}\right)N^{c_0}_{(0)ijk} + \left(1-\delta_{E}-1-\delta_{E}\frac{p_E}{g_E}\right)E^{c_0}_{(0)ijk} + \beta_{ijk} \geq 0\end{gathered}$$

или после элементарных преобразований

$$\begin{gathered}-\delta_{W}\left(1+\frac{p_W}{g_W}\right)W^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{S}\left(1+\frac{p_S}{g_S}\right)S^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{B}\left(1+\frac{p_B}{g_B}\right)B^{c_0}_{(0)ijk} - \\ -\delta_{T}\left(1+\frac{p_T}{g_T}\right)T^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{N}\left(1+\frac{p_N}{g_N}\right)N^{c_0}_{(0)ijk} - \delta_{E}\left(1+\frac{p_E}{g_E}\right)E^{c_0}_{(0)ijk} + \beta_{ijk} \geq 0,\end{gathered}$$

следовательно, в компактной форме записи

$$-\sum_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1+\frac{p_\Theta}{g_\Theta}\right)\Theta^{c}_{(0)ijk} + \beta_{ijk} \geq 0. \tag{12}$$

Таким образом, имеем (7). Теорема доказана. □

Для операторов нестационарного уравнения конвекции-диффузии с краевыми условиями 3-го рода в случае неявной схемы при центрально-разностной аппроксимации конвективных членов показана устойчивость используемой разностной схемы при выполнении условий теоремы 3.

Запишем схему (6) в каноническом виде

$$(E + \tau A^c) s_t + A^c s^n = f. \tag{13}$$

В работе [6] для случая несамосопряженного оператора $A^c$ сформулирован критерий устойчивости. Приведем формулировку этой теоремы для неявной схемы (13).

**Теорема 4.** *[6] Если оператор $A^{-1}$ в схеме*

$$(E + \tau A) s_t + As = 0$$

*существует, то для устойчивости схемы в гильбертовом пространстве $L_{2h}$, т. е. выполнения оценки*

$$\|s^{n+1}\| \leq \|s^n\|, \quad n \geq 0,$$

*необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства*

$$A + 0,5 \tau A^* A \geq 0. \tag{14}$$

Неравенство (14) означает выполнение условия

$$(Ax, x) + 0,5\tau \|Ax\|^2 \geq 0.$$

Поэтому имеет место

**Теорема 5.** *Для устойчивости неявной схемы (6) при центрально-разностной аппроксимации конвективных членов нестационарного уравнения конвекции-диффузии (1), (2), записанного в симметричной форме ($\gamma = 1/2$), с краевыми условиями 3-го рода (5) достаточно выполнения неравенств (7), в котором хотя бы одно из неравенств является строгим.*

**Доказательство.** Если выполнены условия теоремы 4, то для устойчивости схемы (6) достаточно диссипативности оператора $A^c$.

Теорема доказана. □

# 4. $M$-матричность рассматриваемого разностного оператора

Для разностных операторов $\bar{L}_h^p$, получаемых в результате пространственной аппроксимации уравнений системы (1) при противопотоковой аппроксимации конвективных членов в уравнении конвекции-диффузии (1), (2) с $\gamma = 1$ при наличии граничных условий 3-го рода и постоянного коэффициента консервативности рассматриваемого вещества, доказано достаточное условие $M$-матричности получаемого разностного оператора.

**Теорема 6.** *Пусть в уравнении конвекции-диффузии (1), (2), записанном в недивергентной форме* ($\gamma = 1$)*, с краевыми условиями 3-го рода (5) и* $\beta = \beta(x, y, z, t) > 0$ *конвективные члены аппроксимируются разностями "против потока".*

*Тогда для того чтобы оператор* $\bar{L}_h^p$ *— разностный аналог стационарной задачи конвекции-диффузии — был невырожденной* $M$*-матрицей, достаточно выполнение неравенств*

$$\beta_{ijk} - \sum_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1 + \frac{p_\Theta}{g_\Theta}\right) \Theta^p_{(0)ijk} \ge 0, \tag{15}$$

$$i = 1, ..., N_x - 1, \quad j = 1, ..., N_y - 1, \quad k = 1, ..., N_z - 1,$$

*в котором хотя бы одно из неравенств (15) является строгим. Здесь* $\Theta^p_{(0)ijk}$ *— элементы матрицы* $A^p$ *оператора* $\bar{L}_h^c$ *в (6) в приграничном узле для соответствующей границы;* $\delta_\Theta$ *— символ Кронекера для соответствующей границы;* $g_\Theta, p_\Theta$ *— коэффициенты из (5),* $g_\Theta \ne 0$.

**Доказательство.** В случае противопотоковой аппроксимации матрица $A^p$ имеет квадратно-блочно-трехдиагональную структуру вида (9). Такая матрица является неразложимой [3, 5]. Кроме того, внедиагональные элементы матрицы $A^p$ отрицательны. Так как вклады граничных условий 3-го рода вошли в диагональ оператора $\bar{L}_{Dh}$, нам в силу теоремы 2 для доказательства свойства $M$-матричности достаточно показать выполнение диагонального преобладания матрицы $A^p$ и положительность элементов матрицы, лежащих на главной диагонали. Таким образом, необходимо показать выполнение

$$\begin{cases} |a_{ii}| \ge \sum\limits_{i \ne j} |a_{ij}|, \\ a_{ii} > 0. \end{cases}$$

Сумма норм — это неотрицательная величина, поэтому достаточно найти условия выполнения неравенства

$$\begin{cases} a_{ii} \ge \sum\limits_{i \ne j} |a_{ij}|, \\ a_{ii} \ne 0. \end{cases} \tag{16}$$

Эти условия обеспечат нам положительность диагональных элементов.

В результате противопотоковой аппроксимации пространственных производных получена разностная схема на семиточечном шаблоне

$$\begin{gathered} W^p_{(0)ijk} s_{i-1jk} + S^p_{(0)ijk} s_{ij-1k} + B^p_{(0)ijk} s_{ijk-1} + D^p_{(0)ijk} s_{ijk} + T^p_{(0)ijk} s_{ijk+1} + \\ + N^p_{(0)ijk} s_{ij+1k} + E^p_{(0)ijk} s_{i+1jk} = f^n_{ijk}, \end{gathered} \tag{17}$$

коэффициенты которой для внутренних точек сеточной области имеют следующий вид:

$$W^p_{(0)ijk} = -\frac{a^x_{ijk}}{h_x^2} - \frac{u^+_{ijk}}{h_x}, \quad S^p_{(0)ijk} = -\frac{a^y_{ijk}}{h_y^2} - \frac{v^+_{ijk}}{h_y}, \quad B^p_{(0)ijk} = -\frac{a^z_{ijk}}{h_z^2} - \frac{w^+_{ijk}}{h_z},$$

$$\begin{gathered} D^p_{(0)ijk} = \frac{a^x_{i+1jk} + a^x_{ijk}}{h_x^2} + \frac{a^y_{ij+1k} + a^y_{ijk}}{h_y^2} + \frac{a^z_{ijk+1} + a^z_{ijk}}{h_z^2} + \\ + \frac{|u_{ijk}|}{h_x} + \frac{|v_{ijk}|}{h_y} + \frac{|w_{ijk}|}{h_z} + \beta_{ijk}, \end{gathered} \tag{18}$$

$$T^p_{(0)ijk} = -\frac{a^z_{ijk+1}}{h_z^2} + \frac{w^-_{ijk}}{h_z}, \quad N^P_{(0)ijk} = -\frac{a^y_{ij+1k}}{h_y^2} + \frac{v^-_{ijk}}{h_y}, \quad E^p_{(0)ijk} = -\frac{a^x_{i+1jk}}{h_x^2} + \frac{u^-_{ijk}}{h_x}.$$

Для $D^p_{(0)ijk}$ имеет место

$$D^p_{(0)ijk} = -W^p_{(0)ijk} - S^p_{(0)ijk} - B^p_{(0)ijk} - T^p_{(0)ijk} - N^p_{(0)ijk} - E^p_{(0)ijk} + \beta_{ijk}. \tag{19}$$

Аналогично доказательству теоремы 3 для выполнения (16) необходимо, чтобы

$$D^p_{ijk} - \delta_W \frac{p_W}{g_W} W^p_{ijk} - \delta_S \frac{p_S}{g_S} S^p_{ijk} - \delta_B \frac{r_B}{p_B} B^p_{ijk} - \delta_T \frac{r_T}{p_T} T^p_{ijk} -$$
$$-\delta_N \frac{r_N}{p_N} N^p_{ijk} - \delta_E \frac{r_E}{p_E} E^p_{ijk} + \beta_{ijk} \geq \left|(1-\delta_W) W^p_{ijk}\right| + \left|(1-\delta_S) S^p_{ijk}\right| +$$
$$+ \left|(1-\delta_B) B^p_{ijk}\right| + \left|(1-\delta_T) T^p_{ijk}\right| + \left|(1-\delta_N) N^p_{ijk}\right| + \left|(1-\delta_E) E^p_{ijk}\right|.$$

Используя (19), а также то, что по построению $W^p_{ijk}, S^p_{ijk}, B^p_{ijk}, T^p_{ijk}, N^p_{ijk}, E^p_{ijk}$ являются отрицательными величинами, а $(1-\delta_\Theta) \geq 0$ по определению символа Кронекера, имеем по аналогии с выкладками в доказательстве теоремы 3 и, используя определение модуля,

$$D^p_{ijk} - \delta_W \frac{p_W}{g_W} W^p_{ijk} - \delta_S \frac{p_S}{g_S} S^p_{ijk} - \delta_B \frac{r_B}{p_B} B^p_{ijk} - \delta_T \frac{r_T}{p_T} T^p_{ijk} -$$
$$-\delta_N \frac{r_N}{p_N} N^p_{ijk} - \delta_E \frac{r_E}{p_E} E^p_{ijk} + \beta_{ijk} \geq -(1-\delta_W) W^p_{ijk} - (1-\delta_S) S^p_{ijk} -$$
$$-(1-\delta_B) B^p_{ijk} - (1-\delta_T) T^p_{ijk} - (1-\delta_N) N^p_{ijk} - (1-\delta_E) E^p_{ijk}$$

или после элементарных преобразований

$$\left(1 - \delta_W - 1 - \delta_W \frac{p_W}{g_W}\right) W^p_{ijk} + \left(1 - \delta_S - 1 - \delta_S \frac{p_S}{g_S}\right) S^p_{ijk} +$$
$$+ \left(1 - \delta_B - 1 - \delta_B \frac{p_B}{g_B}\right) B^p_{ijk} + \left(1 - \delta_T - 1 - \delta_T \frac{p_T}{g_T}\right) T^p_{ijk} +$$
$$+ \left(1 - \delta_N - 1 - \delta_N \frac{p_N}{g_N}\right) N^p_{ijk} + \left(1 - \delta_E - 1 - \delta_E \frac{p_E}{g_E}\right) E^p_{ijk} + \beta_{ijk} \geq 0,$$

значит, в компактной форме записи

$$-\sum_{\Theta = W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1 + \frac{p_\Theta}{g_\Theta}\right) \Theta^p_{(0)ijk} + \beta_{ijk} \geq 0,$$

а следовательно, получим (15).

Теорема доказана. □

Для операторов нестационарного уравнения конвекции-диффузии с краевыми условиями 3-го рода в случае неявной схемы при противопотоковой аппроксимации конвективных членов с помощью принципа максимума получены оценки решения задачи через ее правую часть, начальные и граничные условия при выполнении условий теоремы 6.

**Теорема 7.** *Для решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии (1), (2), записанного в недивергентой форме ($\gamma = 1$), с краевыми условиями 3-го рода (5) в случае использования разностей "против потока" при выполнении условий (15) для неявной схемы (6) справедливы оценки:*

*для консервативного вещества* $(\beta(x,y,z,t)=0)$

$$\|s\|_C \le \|S_0\|_{C_h} + T\,\|f\|_{\overset{\circ}{C}} + \max_{n\ge 0}\left\| \frac{f^n}{\sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1+\dfrac{p_\Theta}{g_\Theta}\right)\Theta^p_{ijk}} \right\|_{C^*} +$$

$$+\left\| \frac{\sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \dfrac{r_\Theta}{g_\Theta}\Theta^p_{ijk}}{\sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1+\dfrac{p_\Theta}{g_\Theta}\right)\Theta^p_{ijk}} \right\|_{C^*};$$

*для неконсервативного вещества* $(\beta(x,y,z,t)>0)$

$$\|s\|_C \le \|S_0\|_{C_h} + \left\|\frac{f^n}{\beta}\right\|_{\overset{\circ}{C}} + \max_{n\ge 0}\left\| \frac{f^n}{\beta_{ijk} - \sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1+\dfrac{p_\Theta}{g_\Theta}\right)\Theta^p_{ijk}} \right\|_{C^*} +$$

$$+\left\| \frac{\sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \dfrac{r_\Theta}{g_\Theta}\Theta^p_{ijk}}{\beta_{ijk} - \sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \left(1+\dfrac{p_\Theta}{g_\Theta}\right)\Theta^p_{ijk}} \right\|_{C^*}.$$

**Доказательство.** Приведенные оценки получены с использованием идеи методики [7], а также при условии выполнения условия $M$-матричности (15) из теоремы (6).

Теорема доказана. □

Случай $g_\Theta = 0$ рассмотрен в работе [6].

# Список литературы

[1] Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

[2] Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 367 с.

[3] Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.

[4] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 420 с.

[5] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

[6] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Изд-во УРСС, 1998. 272 с.

[7] Крукиер Л.А. Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса систем квазилинейных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1979. № 7. С. 41–52.

*Поступила в редакцию 30 июня 2005 г.,*
*в переработанном виде — 8 августа 2005 г.*