Вычислительные технологии **Том 10, Специальный выпуск, 2005**

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТИПА ГРЕГОРИ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

В. И. Половинкин, Л. В. Половинкина
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: polovinkin@fivt.krasn.ru

Sequences of the Gregory type quadrature formulae with various degree of accuracy and nonnegative coefficients are proposed.

Данная работа по своей тематике связана с теорией приближенного интегрирования С.Л. Соболева [1, 2]. Он ввел формулы с регулярным пограничным слоем. Одним из авторов этой статьи были определены формулы с пограничным слоем [3–5]. Класс этих формул шире класса формул с регулярным пограничным слоем. Было установлено, что существуют кубатурные формулы с пограничным слоем, образующие асимптотически оптимальные последовательности в классах $Ł_p^{(m)}(\Omega)$, $pm > n$, где Ω — ограниченная область n-мерного пространства, [6, 7], и асимптотически оптимальные в классах $Ł_p^{(m)}(a, b)$ последовательности квадратурных формул с пограничным слоем при $p \in (1, \infty]$ [4, 5].

Вопрос о существовании формул с пограничным слоем и регулярным пограничным слоем, имеющих неотрицательные коэффициенты, рассмотрен в [8], где показано, что последовательности таких формул есть, когда области интегрирования Ω удовлетворяют так называемому слабому условию конуса.

Важный класс последовательностей квадратурных формул с пограничным слоем образуют рассмотренные в [4, 5] последовательности типа Грегори. Примерами их являются хорошо известные последовательности формул Грегори. Описание класса последовательностей типа Грегори существенно проще, чем описание класса последовательностей с пограничным слоем.

В.Л. Васкевич показал, что при достаточно больших m у квадратурных формул Грегори не все коэффициенты неотрицательны. Этот результат вытекает, например, из следствия 10.1 в [2, с. 342].

Важными характеристиками последовательностей типа Грегори являются введенные в [4, 5] им сопутствующие числа. Асимптотическая оптимальность любой последовательности типа Грегори в некотором классе $L_p^{(m)}(a, b)$ будет иметь место лишь при определенном значении ее сопутствующего числа.

В работе показано, что для любых чисел æ и параметра m, характеризующего точность рассматриваемых квадратурных формул, существует последовательность типа Грегори с неотрицательными коэффициентами и сопутствующим числом æ. Отсюда вытекает

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00703).

существование последовательностей квадратурных формул с регулярным пограничным слоем, имеющих неотрицательные коэффициенты.

Методы доказательств результатов, полученных в настоящей работе, отличны от методов, примененных для решения аналогичных задач в [8], где доказательства основаны на свойствах интерполяционных многочленов Лагранжа и их многомерных аналогов. Ниже построение квадратурных формул с неотрицательными коэффициентами опирается в основном на прием, состоящий "в исправлении" некоторых формул, коэффициенты которых могут быть отрицательными.

С целью удобства изложения в настоящей статье используются термины, связанные не непосредственно с квадратурными формулами, а с их функционалами ошибок. Например, вместо последовательностей квадратурных формул типа Грегори будут рассматриваться последовательности их функционалов ошибок — последовательности типа Грегори. Далее, a, b, m, n, h будут такие числа, что $a < b, m, n$ — натуральные, $h = (b-a)n^{-1}$.

Разностные операторы Δ^i порядков $i = \overline{1, m}$ вводятся так:

$$(\Delta(x), f(x)) = (\Delta^1 f)(x) = f(x+1) - f(x), \ldots, (\Delta^m f)(x) =$$
$$= (\Delta(\Delta^{(m-1)} f))(x) = (\Delta^{(m-1)} f)(x+1) - (\Delta^{(m-1)} f)(x).$$

Если τ, η, s — числа, s — натуральное число, $\tau \neq 0$, то оператор $\Delta^s(x\tau^{-1} - \eta)$ определим так:

$$(\Delta^s(x\tau^{-1} - \eta), f(x)) = \tau(\Delta^s(x), f(\tau x + \tau\eta)).$$

Когда оператор $\mu = m$ или $\mu = m-1$, K_μ будет означать наибольшее из числа сочетаний $C_\mu^t, t = \overline{0, \mu}$.

Определение 1. *Последовательность функционалов $\{l^h\}$ называется последовательностью типа Грегори, если l^h имеют вид*

$$(l^h, f) = \int_a^b f(x)dx - h\left\{\sum_{i=0}^{t} \alpha_i f(a+hi) + \sum_{i=t+1}^{n-t-1} f(a+hi) + \sum_{i=0}^{t} \beta_i f(b-hi)\right\}, \ n = \overline{\eta, \infty}, \quad (1)$$

где τ, η — натуральные числа; $2t < \eta$; $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{0, t}$, постоянные и выполняются условия

$$(l^h(x), x^k) = 0 \quad \text{при} \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (2)$$

Определение 2. *Если l^h — функционалы вида (1), то числа $h, h\alpha_i, h\beta_i, i = \overline{0, t}$, называются коэффициентами l^h.*

Определение 3. *Последовательность типа Грегори $\{l^h\}$ называется последовательностью с неотрицательными коэффициентами, если у всех функционалов l^h из этой последовательности каждый коэффициент неотрицателен.*

Теорема 1. *При любом m существуют последовательности типа Грегори с неотрицательныи коэффициентами.*

Лемма 1. *Пусть заданы последовательность типа Грегори вида (1) и число $r \in \{\overline{0, t}\}$. Тогда существуют натуральные числа $d > t, \eta_1 \geq \eta, t + d$ и последовательность типа Грегори $\{\rho^h\}$*

$$(\rho^h, f) = \int_a^b f(x)d(x) - h\left\{\sum_{i=0}^{d} \overline{\alpha_i} f(a+hi) + \sum_{i=d+1}^{n-t-1} f(a+hi) + \sum_{i=0}^{t} \beta_i f(b-hi)\right\},$$

$$n = \overline{\eta_1, \infty}. \tag{3}$$

При этом $\overline{\lambda_i}, i = \overline{0, d}$, *— коэффициенты такие, что:*

$$\text{а) при } i \in \{\overline{0,t}\}\backslash r \quad \overline{\alpha_i} = \alpha_i; \tag{4}$$

$$\text{б) } \overline{\alpha_i} \geq 0, \text{ когда } i \in \{\overline{t+1, d}\}; \tag{5}$$

$$\text{в) } \overline{\alpha_r} = \alpha_r + (K_m)^{-1}.$$

Доказательство. Предположим,что условия леммы выполнены.

Пусть натуральное число s таково, что коэффициенты функционалов l^h, соответствующие точкам $a + hr + hsi, i = \overline{1, m}$, равны h. Например, возьмем $s = t + 1 - r$ и при этом будем считать $n > r + ms + t$.

Положим

$$(\rho^h, f) = (l^h, f) + (-1)^m (K_m s)^{-1} \left(\Delta^m \left(\frac{x - a - rh}{hs} \right), f(x) \right) \Bigg|_{x=0}. \tag{6}$$

Опираясь на известную формулу [9, с. 1026]

$$(\Delta^m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} f(x + k), \tag{7}$$

можно проверить непосредственно, что $\{\rho^h\}$ вида [6] удовлетворяет утверждению леммы с $d = r + ms, \eta_1 = r + ms + t + 1$.

Следовательно, лемма верна. □

Применяя в случае необходимости лемму 1 несколько раз, можно убедиться в справедливости такого утверждения.

Лемма 2. *Пусть заданы последовательность типа Грегори* $\{l^h\}$ *вида (1) и число* $r \in \{\overline{0, t}\}$. *Тогда существует последовательность типа Грегори* $\{\rho^h\}$ *вида (3) такая, что* $\overline{\alpha_r} \geq 0$, *а также выполняются условия (4) и (5).*

Прямым ее следствием является такой ее результат.

Лемма 3. *Пусть задана последовательность типа Грегори* $\{l^h\}$ *вида (1). Тогда существует последовательность типа Грегори* $\{\rho^h\}$ *вида (3) такая, что все* $\overline{\alpha_i}, i = \overline{0, d}$, *неотрицательны.*

Аналогично лемме 3 может быть установлена справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть задана последовательность типа Грегори* $\{l^h\}$ *вида* (1). *Тогда существуют натуральные числа* $d, \eta_1, d < \eta_1$, *и последовательность типа Грегори* $\{\rho^h\}$ *с* ρ^h *вида*

$$(\rho^h, f) = \int_a^b f(x)\, d(x) - h \left\{ \sum_{i=0}^{t} \alpha_i f(a + hi) + \sum_{i=t+1}^{n-d-1} f(a + hi) + \sum_{i=0}^{d} \overline{\beta_i}(b - hi) \right\}, \; n = \overline{\eta_1, \infty},$$

такая, что все $\overline{\beta_i} \geq 0$ *при* $i = \overline{0, d}$.

Доказательства лемм 3 и 4 различаются главным образом тем, что вместо функционалов вида (6) надо рассматривать функционалы

$$(\rho^h, f) = (l^h, f) + (K_m s)^{-1} \left(\Delta^m \left(\frac{x - b + hr + hms}{hs} \right), f(x) \right) \Big|_{x=0}$$

при необходимым образом выбранных s.

Пусть теперь $\{l^h\}$ — произвольная последовательность типа Грегори, удовлетворяющая (1) и (2), например последовательность функционалов ошибок квадратурных формул Грегори, точных на многочленах степени ниже m. Применяя к ней последовательно леммы 3 и 4, получим последовательность типа Грегори, удовлетворяющую утверждению теоремы. Следовательно, теорема верна. □

Определение 4. *Сопутствующим числом последовательности типа Грегори вида (1) $\{l^h\}$ называется величина*

$$æ = (b-a)^{-1} \lim_{k\to\infty} \{h^{-m}(l^h(x), x^m)\}. \tag{8}$$

В работах [4, 5] показано, что у любой последовательности типа Грегори существует сопутствующее число.

Следующий результат обобщает теорему (1) и верен при любом m.

Теорема 2. *Каково бы ни было число æ, существует последовательность типа Грегори с неотрицательными коэффициентами, у которой æ будет сопутствующим числом.*

Доказательство. Пусть задано число æ. Выберем некоторую последовательность типа Грегори $\{l^h\}$ вида (1) с неотрицательными коэффициентами. Согласно теореме (1) такая последовательность существует.

Обозначим через æ(l) сопутствующее число $\{l^h\}$. Рассмотрим вначале случай, когда

$$|\, æ - æ(l)\, | \leq m!(K_{m-1})^{-1}. \tag{9}$$

Пусть t — число, соответствующее l^h в формуле (1). Будем считать, что $n > 2(t+m)$. Это условие не повлияет на справедливость теоремы.

Определим функционалы δ^h, ρ^h из равенств

$$(\delta^h, f) = \left(\Delta^{m-1} \left(\frac{x-a}{h} - n + t + m \right) - \Delta^{m-1} \left(\frac{x-a}{h} - t - 1 \right), f(x) \right) \Big|_{x=0}; \tag{10}$$

$$\rho^h = l^h + (m!)^{-1}(æ - æ(l))\delta^h. \tag{11}$$

Непосредственно проверяется равенство нулю функционалов δ^h на многочленах степени ниже m. Отсюда, а также из формул (10) и (11) следует,что $\{\rho^h\}$ будет последовательностью типа Грегори.

Из формулы (7), где m заменено на $m-1$, и из неравенства (9) вытекает, что $\{\rho^h\}$ — последовательность функционалов с неотрицательными коэффициентами.

Формулы (11) и (8) показывают, что сопутствующее число æ(ρ) последовательности $\{\rho^h\}$ таково:

$$æ(\rho) = æ(l) + (m!)^{-1}(b-a)^{-1}(æ - æ(l)) \lim_{h\to 0}\{h^{-m}(\delta^h(x), x^m)\}. \tag{12}$$

Из равенства (10) имеем

$$(\delta^h(x), x^m) = \sum_{j=t+1}^{n-t-m-1} \left(\Delta^{m-1}\left(\frac{x-a}{h} - j - 1\right) - \Delta^{m-1}\left(\frac{x-a}{h} - j\right), x^m\right) =$$

$$= \sum_{j=t-1}^{n-t-m-1} \left(\Delta^{m}\left(\frac{x-a}{h} - j\right), x^m\right) = (n - 2t - m - 1)h^{m+1}m!,$$

откуда следует, что

$$\lim_{h\to 0}\{h^{-m}(\delta^h(x), x^m)\} = \lim_{h\to 0}\{((b-a)h^{-1} - 2t - m - 1)hm!\} = (b-a)m!. \tag{13}$$

Сравнивая формулы (12) и (13), получаем, что $æ(\rho) = æ$, а следовательно, при æ, удовлетворяющих неравенству (9), теорема верна. □

Если æ не удовлетворяет неравенству (9), то надо выбрать конечный набор чисел $æ_1 \ldots æ_s$ так, чтобы

$$| æ(l) - æ_1 |, | æ_1 - æ_2 |, \ldots, | æ_{s-1} - æ_s |, | æ_s - æ | \leq m!(K_{m-1})^{-1},$$

и поочередно доказать существование последовательностей типа Грегори с неотрицательными коэффициентами и сопутствующими числами $æ_1 \ldots æ_s, æ$. Этим теорема будет доказана в общем случае.

Замечание. Если последовательность типа Грегори имеет сопутствующее число равным нулю, то она будет последовательностью функционалов ошибок квадратурных формул с регулярным пограничным слоем [4, 5]. В этом случае теорема 2 может быть получена непосредственно из теоремы 1, если в условии 2 параметр m заменить $m + 1$.

Список литературы

[1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

[2] Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

[3] Половинкин В.И. Последовательности функционалов с пограничным слоем // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 2. С. 413–429.

[4] Половинкин В.И. Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. семинара им. С.Л. Соболева: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1977. № 1. С. 149–158.

[5] Половинкин В.И. Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем и последовательности типа Грегори // Квадратурные и кубатурные формулы. Решение функциональных уравнений. (Методы вычислений): Сб. науч. тр. / Ленингр. ун-т. 1981. Вып. 12. С. 7–25.

[6] Половинкин В.И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 328–335.

[7] Половинкин В.И. Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1255–1262.

[8] Половинкин В.И. Решетчатые кубатурные формулы с положительными коэффициентами // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. семинара им. С.Л. Соболева: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1978. № 1. С. 79–87.

[9] Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия. 1979.

Поступила в редакцию 2 ноября 2005 г.