# РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОЙ СРЕДЫ, АРМИРОВАННОЙ ТРЕМЯ СЕМЕЙСТВАМИ ВОЛОКОН

Н. А. Федорова
*Красноярский государственный технический университет, Россия*
e-mail: `ran@krsk.info`

Systems of equations governing the plane problem for the elastic media reinforced with possible combinations of three nonextensible and equally stretchable fibres are derived. Some exact solutions of model [1, 2] are constructed using the invariant solutions of the derived partial differential equations.

Рассматриваются плоские задачи упругости для сред, армированных тремя семействами волокон. Пусть армирование выполнено волокнами постоянного поперечного сечения. Для описания композита используется структурная модель [3]. Модель содержит алгебраические и дифференциальные уравнения относительно интенсивностей армирования $\omega_k(x,y)$, компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(x,y)$, деформаций в волокнах первого, второго и третьего семейств $\varepsilon_k(x,y)$, напряжений в волокнах первого, второго и третьего семейств — $\sigma_k(x,y)$, осредненных напряжений $\sigma_{ij}(x,y)$, где $x,y$ — декартовы координаты, $\varphi_k(x,y)$ — углы армирования, индексы $i,j = 1,2,\ k = 1,2,3$. В рамках принятых обозначений при условии постоянства поля температур $T$ исходная система имеет вид

$$(\omega_k l_{k1})_{,1} + (\omega_k l_{k2})_{,2} = 0; \tag{1}$$

$$\varepsilon_{11} l_{k1}^2 + \varepsilon_{22} l_{k2}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{k1} l_{k2} = \varepsilon_k^0; \tag{2}$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \tag{3}$$

Использованы обозначения: $\varepsilon_k^T = \alpha_k^a T,\ \varepsilon_k^0 = \varepsilon_k + \varepsilon_k^T,\ l_{k1} = \cos\varphi_k,\ l_{k2} = \sin\varphi_k,\ \alpha_k^a$ — коэффициенты линейного расширения материала $k$-го семейства волокон ($k = 1,2,3$). Символы $_{,1},\ _{,2}$ означают частное дифференцирование по координатам $x,y$ соответственно. Правая часть в (2) учитывает как случай равнодеформированных ($\varepsilon_k = \mathrm{const},\ \varepsilon_k^0 = \mathrm{const} + \varepsilon_k^T$), так и случай нерастяжимых ($\varepsilon_k = 0,\ \varepsilon_k^0 = \varepsilon_k^T$) семейств волокон и их возможные комбинации (некоторые из семейств волокон равнодеформируемы, другие — нерастяжимы).

Осредненные напряжения $\sigma_{ij}(x,y)$ имеют вид

$$\sigma_{ij} = \Omega\sigma_{ij}^c + \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj},\ \ \Omega = 1 - (\omega_1(x,y) + \omega_2(x,y) + \omega_3(x,y)). \tag{4}$$

В (4) напряжения в связующем определяются по формулам

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1+\nu)T), \quad \sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij}, \quad j = 3-i, \ i = 1, 2.$$

Здесь $E$, $\nu$, $\alpha_c$ — соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала; $E_k$ — модули Юнга $k$-го семейства волокон. Напряжения $\sigma_{ij}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = b_i, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Правые части в (5)

$$b_i = -\left((1-\Omega)\rho_c + \sum_{k=1}^{3}\omega_k\rho_k\right)F_i$$

являются компонентами массовой распределенной нагрузки по направлениям прямоугольной декартовой системы координат. Здесь $\rho_c$, $\rho_k$ — массовые плотности материалов связующего и волокон $k$-го семейства; $F_i$ — компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы.

К системе (1)–(5) присоединяются граничные условия на контуре. Уравнение контура $\Gamma$ задано в параметрическом виде: $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $s$ — некоторый параметр. Причем $\Gamma = \Gamma_p \bigcup \Gamma_u$. На контуре $\Gamma_p$ заданы статические условия с нормальными и касательными усилиями $p_n(s)$, $p_\tau(s)$ соответственно:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s), \quad (\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s). \tag{6}$$

На другой части контура $\Gamma_u$ заданы кинематические условия для перемещений $u_1$, $u_2$:

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \tag{7}$$

В (6), (7) $u_1^0(s)$, $u_2^0(s)$, $p_n(s)$, $p_\tau(s)$ — известные функции; $n_1 = \cos\beta$, $n_2 = \sin\beta$, а $\beta$ — угол, задающий направление внешней нормали к $\Gamma$. С учетом (4) граничные условия (6) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1\sigma_1\cos^2(\varphi_1-\beta) + \omega_2\sigma_2\cos^2(\varphi_2-\beta) + \omega_3\sigma_3\cos^2(\varphi_3-\beta) + \\
&+\Omega[m_3(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T)\cos^2\beta + m_3(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T)\sin^2\beta + \\
&+m_4\varepsilon_{12}\sin\beta\cos\beta] = p_n(s), \\
&\omega_1\sigma_1\sin 2(\varphi_1-\beta) + \omega_2\sigma_2\sin 2(\varphi_2-\beta) + \omega_3\sigma_3\sin 2(\varphi_3-\beta) + \\
&+\Omega m_3\left(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\right)\sin 2\beta + 2\Omega\, m_4\varepsilon_{12}\cos 2\beta = 2p_\tau(s).
\end{aligned} \tag{8}$$

В (8) использованы обозначения для констант

$$L^T = \alpha_c(1+\nu)T, \ m_3 = Em_1, \ m_4 = Em_2, \ m_1 = \frac{1}{1-\nu^2}, \ m_2 = \frac{1}{1+\nu}.$$

Интенсивности $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ задаются на той части контура $\Gamma_\omega$, где волокна входят в конструкцию:

$$\omega_1(\Gamma_\omega) = \omega_1^*(s), \ \ \omega_2(\Gamma_\omega) = \omega_2^*(s), \ \omega_3(\Gamma_\omega) = \omega_3^*(s). \tag{9}$$

Общие ограничения для интенсивностей армирования имеют вид

$$0 < \omega_k \le 0.7, \quad \Omega = 1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3.$$

В дальнейшем при расчетах во всех случаях для удобства работы в системе производится ее обезразмеривание: декартовы координаты $x, y$ относятся к некоторому характерному линейному размеру, напряжения — к характерному модулю Юнга используемых материалов. В настоящей работе сформулированы разрешающие системы для следующих случаев армирования композита тремя семействами волокон.

I. Пусть все три семейства волокон равнодеформируемы, т. е. $\varepsilon_k = \mathrm{const}$, выполняется закон Гука $\sigma_k = E_k\varepsilon_k$, правая часть в (2) принимает вид $\varepsilon_k^0 = \mathrm{const} + \alpha_k^a T$. Разрешающая система уравнений строится следующим образом. Интенсивности $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ удовлетворяют уравнениям (1). Неизвестные компоненты деформаций входят в алгебраические (2) и дифференциальные (3) уравнения. Подстановка выражений для осредненных напряжений из (4) в уравнения равновесия (5) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
&\sigma_2\omega_2(-\sin\varphi_2)\partial_{s2}\varphi_2 + \sigma_1\omega_1(-\sin\varphi_1)\partial_{s1}\varphi_1 + \frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} + \\
&+\sigma_3\omega_3(-\sin\varphi_3)\partial_{s3}\varphi_3 + \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T))_{,1} = b_1, \\
&\sigma_1\omega_1\cos\varphi_1\partial_{s1}\varphi_1 + \sigma_2\omega_2\cos\varphi_2\partial_{s2}\varphi_2 + \sigma_3\omega_3(cos\varphi_3)\partial_{s3}\varphi_3 + \\
&+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} + \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2} = b_2.
\end{aligned} \tag{10}$$

При дифференцировании напряжений используются соотношения (1), что позволяет упростить выражения. В уравнениях (10) введены обозначения для производных

$$\partial_{sk}\varphi_k = \cos\varphi_k\varphi_{k,1} + \sin\varphi_k\varphi_{k,2}.$$

Здесь углы армирования $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ — неизвестные функции.

Совокупность уравнений (1)–(3), (10) образует замкнутую систему девяти уравнений относительно девяти неизвестных: $\varepsilon_{ij},\ \varphi_k,\ \omega_k$. Удобно ввести три новых функции:

$$z_k(x,y) = \operatorname{tg}\varphi_k(x,y),\ \ \varphi_k(x,y) \neq \pi/2.$$

Тогда (1) перепишется как

$$(\omega_k)_{,1} + z_k(\omega_k)_{,2} + \omega_k\left(\frac{(z_k)_{,2}}{1+z_k^2} - z_k\frac{(z_k)_{,1}}{1+z_k^2}\right) = 0. \tag{11}$$

Алгебраические уравнения (2) запишутся так:

$$\varepsilon_{11} + z_k^2\varepsilon_{22} + 2z_k\varepsilon_{12} = \varepsilon_k^0(1+z_k^2). \tag{12}$$

В (10) соотношения для производных также преобразуются:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_k\partial_{sk}\varphi_k &= \operatorname{sgn} z_k\frac{z_k}{1+z_k^2}(\varphi_{k,1} + z_k\varphi_{k,2}), \\
\cos\varphi_k\partial_{sk}\varphi_k &= \operatorname{sgn} z_k\frac{z_k}{1+z_k^2}((z_k)^{-1}\varphi_{k,1} + \varphi_{k,2}).
\end{aligned}$$

Функция $\operatorname{sgn} z_k = \pm 1$ в зависимости от знака тангенса угла армирования $z_k = \operatorname{tg}\varphi_k$, значения углов армирования содержатся в интервале $0 < \varphi_k < \pi$. Причем

$$(\varphi_k)_{,1} = \frac{(z_k)_{,1}}{1+z_k^2},\ (\varphi_k)_{,2} = \frac{(z_k)_{,2}}{1+z_k^2}.$$

С учетом приведенных формул соотношения (10) запишутся как

$$\begin{aligned}
&-\sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2}(z_{2,1}+z_2z_{2,2})-\sigma_1\omega_1\frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}(z_{1,1}+z_1z_{1,2})+\\
&+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2}-\sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2}(z_{3,1}+z_3z_{3,2})+\\
&+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T))_{,1}=b_1,\\
&\sigma_1\omega_1\frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}\left(\frac{1}{z_1}z_{1,1}+z_1z_{1,2}\right)+\sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2}\left(\frac{1}{z_2}z_{2,1}+z_2z_{2,2}\right)+\\
&+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1}+\sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2}\left(\frac{1}{z_3}z_{3,1}+z_3z_{3,2}\right)+\\
&+\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2}=b_2.
\end{aligned}\tag{13}$$

В (13) компоненты деформаций находятся из (2) через $z_k$:

$$\begin{aligned}
\Delta &= -z_2z_3^2-z_1z_2^2+z_1z_3^2+z_3z_2^2-z_3z_1^2+z_2z_1^2,\\
\varepsilon_{11} &= \frac{-\varepsilon_2^0z_3z_1^2+\varepsilon_2^0z_3^2z_2^2z_1-\varepsilon_1^0z_3^2z_1^2-\varepsilon_2^0z_3z_1^2z_2^2+\varepsilon_1^0z_3z_1^2z_2^2-\varepsilon_3^0z_3^2z_1z_2^2}{\Delta}+\\
&+\frac{\varepsilon_3^0z_3^2z_2z_1^2-\varepsilon_1^0z_3^2z_2+\varepsilon_2^0z_3^2z_1+\varepsilon_1^0z_3z_2^2-\varepsilon_3^0z_1z_2^2+\varepsilon_3^0z_2z_1^2}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Для остальных компонент тензора деформаций выражения аналогичны. После их подстановки в (13) и (3) получим три уравнения относительно трех неизвестных функций $z_1,\ z_2,\ z_3$, причем из (13) — два нелинейных дифференциальных уравнения первого порядка, из (3) — нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Рассмотрим частные случаи. Если потребовать равенства деформаций в волокнах $\varepsilon_1^0=\varepsilon_2^0=\varepsilon_3^0=\varepsilon^0$ ($\varepsilon^0$ — заданная функция), то решение системы (2) принимает вид

$$\varepsilon_{12}=0,\ \varepsilon_{11}=\varepsilon^0,\ \varepsilon_{22}=\varepsilon^0.$$

В этом случае уравнение совместности деформаций — уравнение Лапласа для задаваемой $\varepsilon^0$

$$\varepsilon^0_{,11}+\varepsilon^0_{,22}=0.$$

Из уравнений (10) и (11) должны определиться $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ z_1,\ z_2,\ z_3$, что возможно при наложении дополнительных условий на один из углов армирования. Например, $\varphi_1$ предполагается заданным, тогда интенсивность армирования вдоль первого семейства волокон определяется из (11) при $k=1$. В частности, при $\varphi_1=x$ интенсивность находится по формуле $\omega_1=\dfrac{F(y+\ln(\cos x))}{\cos x}$, при $\varphi_1=y$ — по формуле $\omega_1=\dfrac{F_1(\sin y/e^x)}{e^x}$. Произвольные функции $F,\ F_1$ определяются из граничных условий. Для вычисления $\omega_2,\ \omega_3,\ z_2,\ z_3$ получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
(\omega_2)_{,1}+z_2(\omega_2)_{,2}+\omega_2\left(\frac{(z_2)_{,2}}{1+z_2^2}-z_2\frac{(z_2)_{,1}}{1+z_2^2}\right)=0,\\
(\omega_3)_{,1}+z_3(\omega_3)_{,2}+\omega_3\left(\frac{(z_3)_{,2}}{1+z_3^2}-z_3\frac{(z_3)_{,1}}{1+z_3^2}\right)=0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2}(z_{2,1}=z_2z_{2,2})-\sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2}(z_{3,1}+z_3z_{3,2})+\\
&+\frac{EK_1}{1-\nu^2}(-\omega_{2,1}-\omega_{3,1})=\frac{EK_1}{1-\nu^2}\omega_{1,1}+b_1,\\
&\sigma_2\omega_2\frac{z_2}{(1+z_2^2)^2}\left(\frac{1}{z_2}z_{2,1}=z_2z_{2,2}\right)+\sigma_3\omega_3\frac{z_3}{(1+z_3^2)^2}\left(\frac{1}{z_3}z_{3,1}+z_3z_{3,2}\right)+\\
&+\frac{EK_2}{1-\nu^2}(-\omega_{2,2}-\omega_{3,2})=\frac{EK_2}{1-\nu^2}\omega_{1,2}+b_2,
\end{aligned} \tag{14}
$$

где

$$K_1=\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T,\ K_2=\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T.$$

Правые части в (14) — известные функции.

II. Пусть равнодеформируемые семейства волокон расположены так, что углы армирования, например $\varphi_1,\ \varphi_2,$ — известные функции, а третий угол армирования $\varphi_3$ — произвольная функция координат. Математически задача при такой укладке становится переопределенной, и в случае построения решения необходимо вводить произвол, чтобы выполнить все уравнения модели (1)–(3) и уравнения равновесия (5). Из (12) выразим компоненты деформаций $\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22}$ через $\varepsilon_{12}$:

$$\varepsilon_{11}=e_{11}\varepsilon_{12}+e_{12},$$

$$\varepsilon_{22}=e_{21}\varepsilon_{12}+e_{22},$$

В дальнейшем используются обозначения

$$
\begin{aligned}
&e_{11}=-a_2/a_1\operatorname{tg}^2\varphi_1-2\operatorname{tg}\varphi_1,\ e_{12}=\varepsilon_1^0(1+\operatorname{tg}\varphi_1)-a_3/a_1\operatorname{tg}^2\varphi_1,\\
&e_{21}=a_2/a_1,\ e_{22}=a_3/a_1,
\end{aligned} \tag{15}
$$

где коэффициенты $a_1,a_2,a_3$ вычисляются через заданные углы армирования и условия равнодеформируемости по формулам

$$
\begin{aligned}
&a_1=1-\operatorname{tg}^2\varphi_1/\operatorname{tg}^2\varphi_2,\ a_2=2(\operatorname{tg}\varphi_1/\operatorname{tg}^2\varphi_2-1/\operatorname{tg}\varphi_2),\\
&a_3=(\varepsilon_2^0(1+\operatorname{tg}\varphi_2)-\varepsilon_1^0(1+\operatorname{tg}\varphi_1))/\operatorname{tg}\varphi_2.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Из третьего уравнения (12) компонента деформации $\varepsilon_{12}$ определяется через неизвестную функцию $z_3=\operatorname{tg}\varphi_3$:

$$\varepsilon_{12}=\frac{b_{12}+b_{22}z_3^2}{e_{11}+e_{21}z_3^2+2z_3}, \tag{17}$$

где $b_{12}=-e_{12}\varepsilon_3^0,\ b_{22}=\varepsilon_3^0-e_{22}$. С учетом (15) уравнение совместности деформаций примет вид

$$e_{11}\varepsilon_{12,22}+e_{21}\varepsilon_{12,11}=2\varepsilon_{12,12}. \tag{18}$$

Знак детерминанта $\delta=e_{11}e_{21}-1$ уравнения (18) определяет его тип при заданных значениях углов армирования

$$\delta=-\frac{(z_2-z_1)^2}{(z_1+z_2)^2}. \tag{19}$$

Пусть $\varphi_1=\operatorname{arctg}x,\ \varphi_2=\operatorname{arctg}y$. Решение уравнения (18)

$$\varepsilon_{12}=\frac{x^3}{6}+(1-\ln y)y+C_1(x+y)+C_2 \tag{20}$$

содержит две произвольные константы $C_1,\ C_2$. Подстановка найденного решения (20) в граничные условия (8) позволяет решить две задачи: 1) установить ограничения на нагрузку; 2) для заданной нагрузки найти соответствующее уравнение граничного контура. Решаем задачу 2. Не ограничивая общности, предположим, что $p_\tau = 0,\ p_n$ — заданная функция. Пусть угол $\beta$, определяющий контур, неизвестен. После подстановки компонент деформаций $\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{22}$ в (8) получим систему двух уравнений относительно неизвестных значений $\varphi_3$ на граничном контуре и $\beta$. Из первого уравнения (8) выразим

$$\begin{aligned}&\cos^2(\varphi_3-\beta) = [p_n - \omega_1\sigma_1\cos^2(\varphi_1-\beta) - \omega_2\sigma_2\cos^2(\varphi_2-\beta) -\\ &-\Omega(m_3(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T)\cos^2\beta - m_3(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T)\sin^2\beta -\\ &-m_4\varepsilon_{12}\sin\beta\cos\beta)]/\omega_3\sigma_3.\end{aligned} \tag{21}$$

Правую часть обозначим $C_p$. Во второе уравнение входит $\sin 2(\varphi_3-\beta)$, с учетом (21) и известных тригонометрических формул запишем

$$\sin 2(\varphi_3-\beta) = \pm 2C_p\sqrt{\frac{1}{C_p}-1}.$$

После подстановки найденных значений второе уравнение (8) зависит от неизвестной $\beta$:

$$p_1\cos^2 2\beta + p_2\sin^2 2\beta + p_3\cos 2\beta\sin 2\beta + p_4\cos 2\beta + p_5\cos 2\beta + p_6 = 0. \tag{22}$$

Коэффициенты $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$ выражаются через известные значения $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ на граничном контуре. Применим универсальную тригонометрическую подстановку — выразим $\sin 2\beta,\ \cos 2\beta$ через $\operatorname{tg}\beta$ и получим полное уравнение четвертой степени относительно $\operatorname{tg}\beta$ с новыми коэффициентами $p_i^*,\ i=\overline{1,6}$, определяемыми через $p_i$:

$$p_1^*\operatorname{tg}^4\beta + p_2^*\operatorname{tg}^3\beta + p_3^*\operatorname{tg}^2\beta + p_4^*\operatorname{tg}\beta + p_5^* = 0. \tag{23}$$

Уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\beta$ определяет уравнение контура $y=f(x)$ в декартовой системе координат, отвечающее решению (20).

III. Пусть все армирующие семейства волокон нерастяжимы. Тогда в (2) правая часть имеет вид $\varepsilon_k^0 = \varepsilon_k^T$. Однако в силу идеализации модели волокон (абсолютно твердое тело) теперь $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ — неизвестные функции координат $x, y$. Поэтому в (10) в случае нерастяжимых волокон появятся производные от этих функций:

$$\begin{aligned}&\sigma_{1,1}(\omega_1\cos^2\varphi_1) + \sigma_{1,2}(\omega_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1) + \sigma_{2,1}(\omega_2\cos^2\varphi_2) +\\ &+\sigma_{2,2}(\omega_2\cos\varphi_2\sin\varphi_2) + \sigma_{3,1}(\omega_3\cos^2\varphi_3) + \sigma_{3,2}(\omega_3\cos\varphi_3\sin\varphi_3) -\\ &-\sigma_1\omega_1\sin\varphi_1\partial_{s1}\varphi_1 - \sigma_2\omega_2\sin\varphi_2\partial_{s2}\varphi_2 - \sigma_3\omega_3\sin\varphi_3\partial_{s1}\varphi_3 +\\ &+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,2} + \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu_{22}-L^T))_{,1} = b_1,\\[2ex] &\sigma_{1,1}(\omega_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1) + \sigma_{1,2}(\omega_1\sin^2\varphi_1) + \sigma_{2,1}(\omega_2\cos\varphi_2\sin\varphi_2) +\\ &+\sigma_{2,2}(\omega_2\sin^2\varphi_2) + \sigma_{3,1}(\omega_3\cos\varphi_3\sin\varphi_3) + \sigma_{3,2}(\omega_3\sin^2\varphi_3) +\\ &+\sigma_1\omega_1\cos\varphi_1\partial_{s1}\varphi_1 + \sigma_2\omega_2\cos\varphi_2\partial_{s2}\varphi_2 + \sigma_3\omega_3\cos\varphi_3\partial_{s3}\varphi_3 +\\ &+\frac{E}{(1+\nu)}(\Omega\varepsilon_{12})_{,1} + \frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2} = b_2.\end{aligned} \tag{24}$$

Совокупность уравнений (1)–(3), (24) не является замкнутой разрешающей системой относительно названных переменных $\varepsilon_{ij}$, $\varphi_k$, $\omega_k$, $\sigma_k$, и для решения задачи следует вводить дополнительные предположения, например о способах укладки семейств армирующих волокон.

Приведем частные решения в случае нерастяжимых семейств волокон. Рассмотрим возможные "особые случаи", возникающие при вычислении компонент деформаций через тангенсы углов армирования из системы алгебраических уравнений (12), и укажем, какие при этом получаются решения исходной задачи.

А. Правая часть (12) $\varepsilon_k^T = \alpha_k^a T$, поэтому при нулевой температуре система становится однородной. Условие ее разрешимости $\triangle = 0$, а именно

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & 2z_1 \\ 1 & z_2^2 & 2z_2 \\ 1 & z_3^2 & 2z_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1 \\ 0 & (z_2^2 - z_1^2) & (z_2 - z_1) \\ 0 & (z_3^2 - z_1^2) & (z_3 - z_1) \end{vmatrix} = 0,$$

приводит к требованию, чтобы траектории двух семейств совпадали: $z_1 = z_2$ или $z_1 = z_3$.

Б. Пусть $T \neq 0$. Систему (12) можно рассматривать как систему трех линейных неоднородных уравнений относительно трех компонент деформаций $\varepsilon_{ij}$. При выборе способа укладки семейств волокон арматуры необходимо рассмотреть возможность $\triangle = 0$ и одновременно $\triangle_k = 0$. Например, для $k = 1$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^0(1+z_1^2) & z_1^2 & z_1 \\ \varepsilon_2^0(1+z_2^2) & z_2^2 & z_2 \\ \varepsilon_3^0(1+z_3^2) & z_3^2 & z_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} z_3 & z_3^2 & \varepsilon_3^0(1+z_3^2) \\ z_1 & z_1^2 & \varepsilon_1^0(1+z_1^2) \\ 0 & 0 & \varepsilon_2^0(1+z_2^2) - \varepsilon_1^0(1+z_1^2) \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\triangle = 0$, $\triangle_k = 0$ при условии, что деформации в первом и втором семействе волокон равны и $z_1 = z_2$, либо при условии, что равны деформации в первом и третьем семействе волокон и $z_3 = z_1$, либо равны деформации в третьем и втором семействе волокон, а $z_3 = z_2$.

Пусть $z_1 = z_2$. Решение системы (12) неединственно, выражения для компонент деформаций через неизвестную функцию $z_1$ запишутся в виде

$$\varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12} z_1 - k_{11}}{z_1^2 - z_3^2},$$

$$\varepsilon_{11} = k_{11} - z_3^2 \varepsilon_{22}, \ \varepsilon_{12} = \mathrm{const}.$$

Коэффициент $k_{11}$ вычисляется по формуле

$$k_{11} = \varepsilon_3^0 z_3^2 - 2z_3\varepsilon_{12} + \varepsilon_3^0.$$

Уравнение совместности (3) в этом случае примет вид

$$-z_3^2 \varepsilon_{22,22} + \varepsilon_{22,11} = 0. \tag{25}$$

После вычисления производных

$$\varepsilon_{22,11} = \frac{d_{11}z_1^3 + d_{12}z_1^2 + d_{13}z_1 + d_{14}}{(z_1^2 - z_3^2)^4}(z_{1,1})^2 + \frac{p_{11} + p_{12}}{(z_1^2 - z_3^2)^2} z_{1,11},$$

$$\varepsilon_{22,22} = \frac{d_{11}z_1^3 + d_{12}z_1^2 + d_{13}z_1 + d_{14}}{(z_1^2 - z_3^2)^4}(z_{1,2})^2 + \frac{p_{11} + p_{12}}{(z_1^2 - z_3^2)^2} z_{1,22}$$

из (25) получим уравнение для неизвестной $z_1$:

$$\frac{d_{11}z_1^3+d_{12}z_1^2+d_{13}z_1+d_{14}}{(z_1^2-z_3^2)^4}(z_{1,1})^2+\frac{p_{11}+p_{12}}{(z_1^2-z_3^2)^2}z_{1,11}- \\ -z_3^2\left(\frac{d_{11}z_1^3+d_{12}z_1^2+d_{13}z_1+d_{14}}{(z_1^2-z_3^2)^4}(z_{1,2})^2+\frac{p_{11}+p_{12}}{(z_1^2-z_3^2)^2}z_{1,22}\right)=0. \tag{26}$$

в разрешенном относительно старших производных виде —

$$z_{1,11}-z_3^2z_{1,22}+\frac{A(z_1^3)}{B(z_1^5)}(z_{1,1})^2+\frac{A(z_1^3)}{B(z_1^5)}(z_{1,2})^2=0. \tag{27}$$

Знак детерминанта $\delta=-z_3^2-1<0$ для уравнения (27) определяет его гиперболический тип для любого значения заданного угла армирования $\varphi_3$. В (27) использованы следующие обозначения:

$$A(z_1^3)=d_{11}z_1^3+d_{12}z_1^2+d_{13}z_1+d_{14},$$

$$B(z_1^5)=c_{11}z_1^5+c_{12}z_1^4+c_{13}z_1^3+c_{14}z_1^2+c_{15}z_1+c_{16},$$

$$p_{11}=2k_{11}-2\varepsilon_1^0z_3^2,\ p_{12}=2\varepsilon_{12}z_3^2,$$

$$d_{11}=-4p_{12},\ d_{12}=-2p_{11}z_3+4p_{11}z_3^2,\ d_{13}=4p_{12}z_3^2,\ d_{14}=p_{11}z_3^2,$$

$$c_{11}=p_{11},\ c_{12}=p_{12},\ c_{13}=-2p_{11}z_3^2,\ c_{14}=-2p_{12}z_3^2,\ c_{15}=p_{11}z_3^4,\ c_{16}=p_{12}z_3^4.$$

При дополнительных условиях равнонапряженности третьего волокна $\sigma_3=\mathrm{const}$ и задании угла армирования $\varphi_3$ получена разрешающая система четырех уравнений относительно четырех неизвестных $z_1,\ \omega_1,\ \sigma_1,\ \sigma_2$. Она состоит из (27), (12) при $k=1$ и двух уравнений (24), которые при сформулированных условиях упрощаются к виду

$$\begin{aligned}&(\sigma_{1,1}+\sigma_{2,1})\omega_1\frac{1}{1+z_1^2}+\operatorname{sgn} z_1(\sigma_{1,2}+\sigma_{2,2})\omega_1\frac{z_1}{1+z_1^2}-\\&-\operatorname{sgn} z_1(\sigma_1+\sigma_2)\omega_1\frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}(z_{1,1}+z_1z_{1,2})=\\&=b_1-\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}-L^T))_{,1},\\&\operatorname{sgn} z_1(\sigma_{1,1}+\sigma_{2,1})\omega_1\frac{z_1}{1+z_1^2}+(\sigma_{1,2}+\sigma_{2,2})\omega_1\frac{z_1^2}{1+z_1^2}+\\&+\operatorname{sgn} z_1(\sigma_1+\sigma_2)\omega_1\frac{z_1}{(1+z_1^2)^2}\left(\frac{1}{z_1}z_{1,1}+z_{1,2}\right)=\\&=b_2-\frac{E}{(1-\nu^2)}(\Omega(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}-L^T))_{,2}.\end{aligned} \tag{28}$$

Система распадается, вначале находится $z_1$ из (27), затем с его использованием определяется $\omega_1$ из (11), затем осуществляется переход к решению (28).

При нахождении частных решений нелинейного уравнения (27) используется алгоритм построения инвариантных решений уравнений в частных производных на основе групп преобразований, допускаемых данными уравнениями, описанный в [4]. Этот алгоритм строит определяющие уравнения для изовектора с использованием форм Картана. Уравнение в частных производных преобразуется к эквивалентной системе дифференциальных форм, а затем производится обратный переход. В ходе алгоритма вычисляется замыкание множества дифференциальных форм и это множество аннулируется к подсписку независимых координат. Временные списки позволяют исключить те части дифференциальных форм, которые относятся к идеалу.

Например, при $\varphi_3 = \pi/4$ и постоянных значениях $\varepsilon_k^0$ уравнение (27) запишется как

$$z_{1,11} - z_{1,22} - \frac{4z_1^3 - 2z_1^2 - 4z_1 - 1}{z_1^5 + z_1^4 - 2z_1^3 - 2z_1^2 + z_1 + 1}((z_{1,1})^2 + (z_{1,2})^2) = 0. \tag{29}$$

После применения алгоритма получено частное решение

$$z(x,y) = \int_0^x (\sin(2t + y - x) + k_1(t) + k_2(t + y - x))dt + F_1(y - x).$$

Произвольные функции $k_1(x),\ k_2(x),\ F_1$ находятся из граничных условий. Граничная задача для $z_1$ ставится на части контура, где волокна входят в конструкцию. Используются граничные условия (8). При принятых в данном пункте предположениях и $\beta = \pi/2$ они запишутся так

$$\begin{aligned}
&(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2)\frac{z_1^2}{1 + z_1^2} + (1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)m_3\left[\frac{\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11}}{z_1^2 - z_3^2} + \right.\\
&\left. + \nu\left(k_{11} - z_3^2\frac{\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11}}{z_1^2 - z_3^2}\right)\right] = p_n(s) - 0.5\omega_3\sigma_3,\\
&(\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2)\sin 2\varphi_1 = 2p_\tau(s) + 2(1 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)m_4 + \sigma_3\omega_3.
\end{aligned}$$

После нахождения $\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2$ из второго уравнения и подстановки в первое получается кубическое уравнение относительно $z_1$ на рассматриваемом контуре, оно имеет вид

$$\begin{aligned}
&0.5Bz_1(z_1^2 - z_3^2) + \Omega m_3(\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11} + \nu k_{11}(z_1^2 - z_3^2) -\\
&- z_3^2(\varepsilon_1^0 z_1^2 - 2\varepsilon_{12}z_1 - k_{11})) = (p_n(s) - 0.5)(z_1^2 - z_3^2),\\
&B = 2p_\tau + 2\Omega m_4\varepsilon_{12} - \omega_3\sigma_3.
\end{aligned}$$

Выберем в качестве связующего материала алюминий ($E = 71$ ГПА, $\nu = 0.31$), пусть он армирован стальными волокнами ($E = 200$ ГПА, $\alpha_k^a = 10.5\dot{1}0^{-6}\,\text{К}^{-1}$) [5]. Температура $T = 10$, интенсивности на границе $\omega_1 = 0.1,\ \omega_2 = 0.1,\ \omega_3 = 0.3$. Если зададим нормальное давление $p_n = 6.203$, уравнение относительно $z_1$ примет вид

$$0.2694z_1^3 - 2.3034z_1^2 - 0.8114z_1 = 0.$$

его корни $0; 8.8861; -0.3388$. Приведем частное решение для (29), удовлетворяющее, например, первому корню ($z_1 = 0$) на границе прямоугольной пластины размера $x \in [\pi/2, \pi]$, $y \in [\pi/2, 3\pi/2]$:

$$z_1(x,y) = \frac{-\cos(x + y)}{2} - \cos x + \sin y + \frac{3\cos(x - y)}{2} + 1 + \sin(x - y).$$

Выполненный анализ показал, что при использовании трех семейств волокон можно построить широкий спектр решений задач об управлении полями деформаций и напряжений в композитных волокнистых пластинах.

## Список литературы

[1] Nemirovsky Ju., Feodorova N.A. The mathematical analysis of permiting systems of the equations of a flat problem of the reinforsed environments // KORUS-2002. Proc. of the 6th Intern. Symp. on Science and Technology. Novosibirsk, 2002. P. 195–197.

[2] Nemirovsky Ju., Feodorova N.A. Flat problem of the elastic environment reinforced with three families of fibres // KORUS-2005. Proc. of the 9th Intern. Symp. on Science and Technology. Novosibirsk, 2005. P. 506–511.

[3] Nemirovsky Yu.V. On the elastic-plastic behaviour of the reinforced layer // Intern. J. Mech. Sci. 1970. Vol. 12. P. 898–903.

[4] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 635 с.

[5] Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

*Поступила в редакцию 2 ноября 2005 г.*